

I PITAGORICI E IL MISTERO DEL SUONO SENZA NUMERO

Pitagora e la musica dell'universo

di Flavio Ubaldini

PITAGORA - LA NASCITA, I VIAGGI E LA SCUOLA

Pitagora (575-495 a.C. circa) è tra le figure più affascinanti e più citate della storia della matematica e la sua impostazione è, per molti versi, ancora alla base del nostro pensiero moderno. Tuttavia, le vicende relative a questo proto-matematico devono essere ricostruite non tanto sulla base di documenti storicamente attendibili, quanto piuttosto su una tradizione un po' incerta che ci è stata tramandata da storici di epoche successive. Oggi si suppone che alcuni dei risultati attribuiti a Pitagora siano stati in realtà prodotti da diverse generazioni di pitagorici.

Tra le biografie di Pitagora a noi pervenute, una delle più antiche e più citate è quella del filosofo neoplatonico *Giamblico di Calcide* (245-325 d.C.)⁽¹⁾. Secondo Giamblico, Pitagora nacque in una ricca famiglia di mercanti sami durante un lungo viaggio d'affari che il padre Mnesarco, incisore di gemme, e la madre Pitaide avevano intrapreso. La nascita del bambino fu preannunciata all'inizio del viaggio, quando Mnesarco si recò a Delfi, dall'oracolo di Apollo Pizio (Pythio): la sacerdotessa Pizia (Pythia). In onore di tale profezia Mnesarco volle chiamare il figlio Pythagoras. Pitagora nacque qualche mese dopo, quando la coppia si trovava a Sidone, in Fenicia.

La famiglia tornò presto a Samo e Pitagora crebbe nella vivace isola che si trovava al crocevia delle grandi rotte mercantili che collegavano il mar Nero con l'Egitto, e l'Italia e la Grecia con l'Oriente. Pitagora crebbe quindi in un ambiente ricco di stimoli e fu in continuo contatto con genti, oggetti e tesori provenienti da ogni parte del mondo allora conosciuto. Insieme alla tradizione familiare, dovette essere anche la curiosità a spingere il giovane a cominciare presto la sua serie di viaggi.

Secondo Giamblico una prima importante meta fu la vicinissima Mileto: la città di Talete. Fu intorno al 550 a.C., quando Talete aveva circa sessanta anni e Pitagora circa venti, che i due pionieri della filosofia dovettero incontrarsi. Giamblico afferma che Talete, stupito dalle capacità del giovane, lo esortò ad andare in Egitto per apprendere la geometria. Tra le piramidi Pitagora dimorò alcuni anni. E fu proba-

⁽¹⁾ Giamblico, *Summa pitagorica*, Bompiani, 2006. Alcune note di Francesco Romano, il curatore della suddetta edizione, e di Hermann Diels e Walther Kranz, *I Presocratici - Testimonianze e frammenti*, Bur Rizzoli, 1991, fanno ritenere che Aristosseno (375 a.C.-322 a.C.), anche quando non espressamente citato, sia la fonte principale del lavoro di Giamblico.

bilmente lì oppure a Babilonia che venne a contatto con il teorema che oggi porta il suo nome. Sembrerà strano ma esistono documenti che precedono Pitagora e che testimoniano una conoscenza applicativa di quel teorema. Non v'è certezza sulla ragione per cui lo si chiamò teorema di Pitagora ⁽²⁾.

Intorno ai quarant'anni, dopo aver viaggiato in Siria, Fenicia, Egitto e Babilonia, assimilando la maggior parte delle conoscenze dei sapienti che incontrava, Pitagora tornò a Samo e tentò di fondare una scuola. Ma il suo tentativo ebbe scarso successo e poco dopo si trasferì nella colonia greca di Crotona, dove riuscì a instaurare ottimi rapporti con i principali esponenti della città e a guadagnare velocemente la stima di molti giovani. Trovò quindi terreno fertile per fondare la sua scuola.

Giamblico riferisce che gli adepti praticavano la comunione dei beni materiali e che tutte le attività e gli insegnamenti della scuola erano mantenuti segreti. L'aspirante adepto poteva essere respinto, oppure accolto come *akousmatikós* (acusmatico – «ascoltatore») o come *mathematikós* (matematico – «incline ad apprendere»). Ed è proprio dal termine *mathematikós* che deriva l'attuale termine «matematica». I matematici potevano apprendere la versione più profonda della conoscenza pitagorica; mentre agli acusmatici era permesso di accedere solo a un numero ristretto di conoscenze e in una forma più limitata e superficiale.

LA SCOPERTA PIÙ IMPORTANTE DEI PITAGORICI

Pitagora è noto soprattutto a causa del teorema che porta il suo nome, ma la scuola pitagorica produsse anche contributi più importanti per la matematica e le scienze.

Giamblico narra che Pitagora,

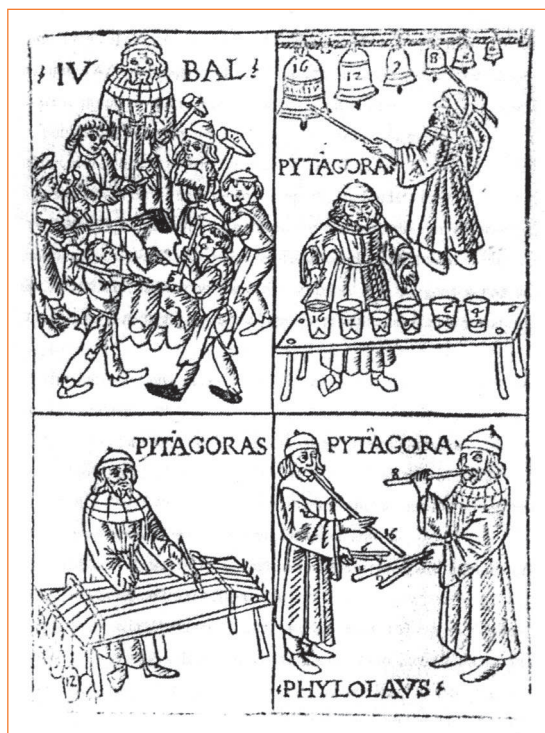
passeggiando nei pressi di una fucina[...], udì dei martelli che battevano del ferro su un'incudine e che producevano dei suoni che, mescolati insieme, erano in perfetto accordo tra loro, ad eccezione di una sola coppia di suoni.

Per capire perché tutte le martellate producevano combinazioni di suoni consonanti mentre quell'unica coppia di martellate produceva una dissonanza – prosegue Giamblico – Pitagora entrò nella fucina e, osservando il lavoro dei fabbri, si accorse che la differenza dipendeva dai rapporti tra i pesi dei martelli.

Su questo aspetto mi permetto di citare il mio lavoro «Il mistero del suono senza numero» ⁽³⁾ in cui, nell'intento di raccontare le vicende della scuola pitagorica

⁽²⁾ ALBERTO A. MARTÍNEZ, *The Cult of Pythagoras: Math and Myths*, University of Pittsburgh Press, 2013, pp. 9-11, riporta una cronologia delle più celebri attribuzioni e dei fatti noti intorno al «teorema dell'ipotenusa», secondo cui la più antica dimostrazione geometrica del teorema a noi pervenuta è quella che Euclide scrisse negli Elementi nel III sec. a.C.

⁽³⁾ FLAVIO UBALDINI, *Il mistero del suono senza numero*, Scienza Express 2017, pp. 23-34.



nella forma narrativa di romanzo storico, ho cercato di ricostruire con l'immaginazione la scena della fucina cercando di rimanere entro i limiti del verosimile riguardo alla realtà dei fenomeni acustici. Così, considerando che generalmente un martello, a differenza di un'incudine, ha una struttura poco adatta alla vibrazione prolungata, ho immaginato che, una volta entrato nella bottega, Pitagora si fosse accorto che l'altezza dei suoni dipendeva dai pesi delle incudini e non dei martelli e che le consonanze e le dissonanze corrispondessero a diversi tipi di rapporti numerici tra i pesi delle incudini. Quando i pesi erano in rapporti semplici, come $1/2$, $2/3$, $3/4$, i suoni erano consonanti. Mentre le dissonanze venivano prodotte da incudini i cui

pesi non erano in rapporti semplici, come $20/21$, ad esempio.

Giamblico afferma anche che Pitagora volle capire meglio il fenomeno e, una volta tornato a casa, si mise a indagare i suoni emessi da corde che vibrano e ritrovò la stessa corrispondenza tra rapporti numerici, consonanze e dissonanze.

A noi oggi tale corrispondenza pare ovvia ma ai pitagorici dovette sembrare inspiegabile. Perché un fenomeno musicale percepito dall'orecchio dovrebbe dipendere da rapporti tra numeri? Perché musica, grandezze del mondo fisico e numeri dovrebbero essere correlati? I pitagorici si misero a indagare la natura alla ricerca di altre corrispondenze tra numeri e fenomeni del mondo fisico e, inaspettatamente, ne trovarono una anche nei movimenti e nelle orbite dei pianeti! Questa ulteriore scoperta li portò a elaborare la teoria della «musica delle sfere»⁽⁴⁾. Inoltre, l'aver ritrovato la corrispondenza tra numeri e mondo fisico in ambiti così diversi, portò i pitagorici a generalizzare e ad affermare che tutti i fenomeni dell'universo si possono leggere attraverso i numeri. Spesso questa teoria viene sintetizzata con l'espressione «tutto è numero». Così ne parla Kitty Ferguson.

⁽⁴⁾ KITTY FERGUSON, *La musica di Pitagora*, Bollati Boringhieri, 2013, p. 171, attribuisce ad Aristotele, *De caelo*, trad. it. di Oddone Longo, Sansoni, 1961, la descrizione più attendibile della teoria della «musica delle sfere»: *Gli astri si muovono con un moto di tale velocità che è impossibile che non producano un suono d'intensità straordinaria. ... essi [i Pitagorici] affermano che il suono prodotto dal moto circolare degli astri è armonico.*

Nell'universo c'era ordine, e quest'ordine era fatto di numeri. Questa fu la grande intuizione pitagorica, ed era diversa da tutte le precedenti concezioni della natura e dell'universo. Benché i pitagorici non sapessero come usare il tesoro che avevano trovato la loro scoperta ha guidato il pensiero umano da allora. Pitagora e i suoi seguaci avevano scoperto anche che c'era un potente legame fra le percezioni dei sensi umani e i numeri che pervadevano e governavano ogni cosa. La natura seguiva una logica fondamentale, razionale, bella, e gli esseri umani erano in accordo con essa, non solo a un livello intellettuale (potevano scoprirla e comprenderla) ma anche a quello dei sensi (potevano percepirla nella musica attraverso l'udito).

L'intuizione che tutto è numero attraversò i secoli immergendosi e riemergendo dalla terra carsica del pensiero occidentale. Più di duemila anni dopo, Galileo Galilei sembra ancora riecheggiarla ed estenderla alla geometria quando descrive uno dei pilastri del metodo scientifico: «La filosofia è scritta in questo grandissimo libro che continuamente ci sta aperto innanzi a gli occhi (io dico l'universo), ma non si può intendere se prima non s'impara a intender la lingua, e conoscer i caratteri, ne quali è scritto. Egli è scritto in lingua matematica, e i caratteri son triangoli, cerchi, ed altre figure geometriche, senza i quali mezzi è impossibile a intenderne umana mente parola».

Si potrebbe dunque considerare la scoperta dei pitagorici come uno dei primi tra i tanti affluenti che hanno contribuito a formare il metodo scientifico. Così la considera certamente Kitty Ferguson che si spinge a definirla la scoperta più importante dei pitagorici.

Ma tornando ai tempi di Pitagora, pare che, dopo la scoperta del rapporto tra musica e numeri e l'elaborazione della teoria della musica delle sfere, la teoria del «tutto è numero» divenne il fondamento degli insegnamenti pitagorici. E l'assetto della scuola dovette funzionare senza grosse variazioni fino al giorno in cui un giovane adepto si accorse della presenza di un problema in quella teoria.

IPPASO, L'INCOMMENSURABILE E IL CROLLO DELLA SCUOLA

Esiste un'altra versione della scoperta del rapporto tra musica e numeri che, a differenza di quella di Giamblico, non contiene ambiguità circa i fenomeni acustici in gioco e non ha Pitagora come protagonista bensì lui, il giovane pitagorico che trovò il problema nella teoria del maestro: Ippaso di Metaponto.

Secondo questo racconto, Ippaso costruì uno strumento con quattro dischi di bronzo di uguale diametro e spessore diverso e, con un'indagine simile a quella fatta da Pitagora con le incudini e le corde trovò la stessa correlazione tra rapporti semplici, come $1/2$, $2/3$, $3/4$, e suoni consonanti e tra rapporti non semplici e suoni dissonanti, usando lo spessore dei dischi come grandezza misurabile.

A questo punto ci si potrebbe legittimamente chiedere quale delle due sia la versione più verosimile.

Concordo con Kitty Ferguson nel ritenere la versione di Aristosseno più credibile di quella di Giamblico. Prima di tutto perché la prima non contiene l'opinabi-

lità sulla sorgente del suono – incudini o martelli –; in secondo luogo perché la vibrazione emessa da un disco di bronzo, supponendolo costruito *ad hoc* per l'esperimento, può avvicinarsi molto di più alla forma d'onda di un suono con altezza identificabile rispetto alle forme d'onda emesse da un'incudine o da un martello; e infine perché Aristosseno si trova sette secoli più vicino ai fatti rispetto a Giamblico.

Credo che la maggiore fortuna della versione di Giamblico sia da attribuire all'efficacia narrativa della scena ambientata nella fucina del fabbro.

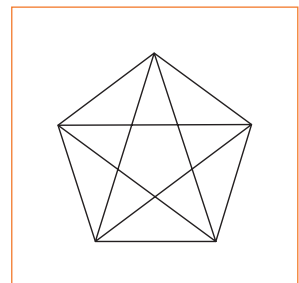
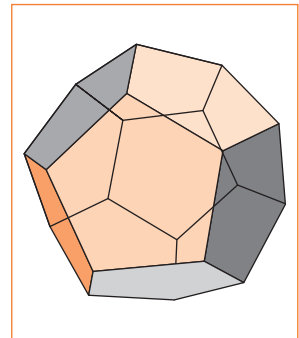
Tornando alla teoria del «tutto è numero», il problema che Ippaso trovò, e che probabilmente mise in crisi la scuola, è un oggetto non esprimibile attraverso un numero ⁽⁵⁾. Giamblico sostiene che, per aver divulgato il segreto, l'autore della scoperta non se la passò molto bene: secondo una versione venne bandito dalla scuola, secondo l'altra morì annegato.

L'INCOMMENSURABILITÀ DELLA NATURA: TRIANGOLO, PENTAGONO O SUONO SENZA NUMERO?

Anche per quanto riguarda l'oggetto che Ippaso scoprì esistono diverse ipotesi. È vero che un oggetto del genere può essere facilmente trovato usando il teorema di Pitagora, ma non c'è certezza che Ippaso lo scoprì proprio in quel modo.

La prima ipotesi è quella proposta da Giamblico: «Di Ippaso si dice che era un Pitagorico, e che sarebbe perito in mare come empio per aver divulgato la sfera che egli per primo aveva costruita geometricamente a partire da dodici figure pentagonali». Cioè, i dodici pentagoni che costituiscono le facce del dodecaedro.

Ipotesi rivalutata e interpretata successivamente da Kurt von Fritz, secondo cui Ippaso avrebbe scoperto l'irrazionalità inscrivendo pentagrammi geometrici nei pentagoni del dodecaedro e accorgendosi che il lato e la diagonale sono incommensurabili ⁽⁶⁾. Quindi, secondo questa ipotesi, l'oggetto che minava le fondamenta della dottrina pitagorica si sarebbe celato proprio nel simbolo della scuola: il pentagramma geometrico.



⁽⁵⁾ I numeri noti ai pitagorici erano i soli numeri razionali cioè interi e frazioni.

⁽⁶⁾ KURT VON FRITZ, *The Discovery of Incommensurability by Hippasus of Metapontum*, *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 46, No. 2, Apr., 1945, pp. 242-264. Cfr. *The Cult of Pythagoras: Math and Myths* cit., p. 20.

La seconda ipotesi, di cui parla Aristotele⁽⁷⁾, vuole invece che l'oggetto sia affiorato durante lo studio del rapporto tra lato e diagonale di un quadrato in una specifica applicazione del celebre teorema del maestro!

Se consideriamo il triangolo rettangolo di cateto 1 e chiamiamo d la lunghezza dell'ipotenusa, applicando il teorema avremo:

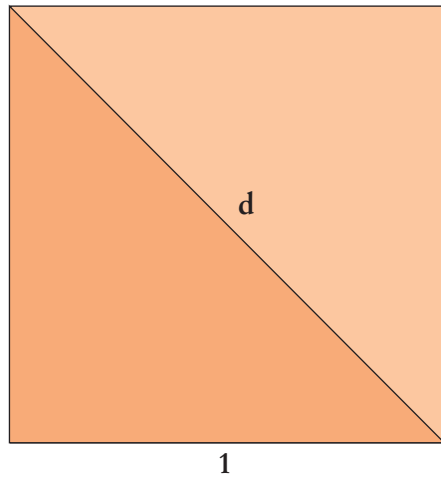
$$2 = d^2$$

Il problema di cui si accorse Ippaso è che quel numero d , che elevato al quadrato è uguale a 2 e che oggi chiamiamo radice di 2, non si può esprimere come un rapporto tra numeri interi, cioè non può esistere alcuna coppia di interi, m ed n , tali che $m/n = \sqrt{2}$. Il che equivale a dire che la diagonale del quadrato non può essere misurata in termini di lato del quadrato. In altre parole, se assumiamo il lato del quadrato come unità di misura, non riusciremo mai a esprimere un rapporto di numeri interi che possa rappresentare la lunghezza della diagonale.

La terza ipotesi, elaborata dallo storico ungherese Árpád Szabó, vuole che la scoperta del concetto di incommensurabilità sia legata al tentativo di risolvere un problema di teoria musicale⁽⁸⁾.

Sappiamo che le lunghezze di due corde che producono l'intervallo di ottava sono in rapporto di 2 a 1. I pitagorici si sarebbero posti il problema di determinare la lunghezza di una terza corda, indi-

chiamola con L , di misura intermedia che potesse generare due intervalli uguali: uno facendo vibrare la corda maggiore e quella intermedia L , e l'altro facendo vibrare quest'ultima e quella minore. Per cui il rapporto tra le lunghezze della corda maggiore e di quella intermedia $2/L$ dovrà essere uguale a quello tra le lunghezze della corda intermedia e di quella minore $L/1$.



(7) Aristotele, *Organon*, Analitici primi, <https://bit.ly/2I19vNM>, I.23.41a23-7. Cfr. *The Cult of Pythagoras: Math and Myths* cit., p. 25. In quella pagina Martínez riporta anche la dimostrazione citata da Aristotele, in cui si procede per assurdo ipotizzando che $\sqrt{2}$ possa esprimersi come frazione m/n .

(8) ÁRPÁD SZABÓ, *The beginnings of Greek mathematics*, <https://bit.ly/2D0kuTs>, p. 179, Dordrecht, Reidel, 1978. Cfr. GIACOMO MICHELACCI, *L'evoluzione del metodo nella matematica greca*, Esercizi Filosofici, Vol. 6, anno 2002.

Cioè $2/L = L$ e quindi $L^2 = 2$

I pitagorici avrebbero così trovato delle corde le cui lunghezze non erano esprimibili attraverso i numeri naturali. Ma allora che suono avrebbero generato quelle corde? Un suono senza numero? Un fatto assurdo secondo la loro teoria.

L'aspetto comune a queste tre ipotesi è che l'oggetto che innescò la crisi si trovava in ambiti molto importanti per i pitagorici. Visto a posteriori il fatto non dovrebbe sorprendere, visto che i numeri irrazionali sono enormemente più numerosi rispetto ai numeri razionali. Quindi la probabilità di trovarli in qualsiasi ambito matematico è molto alta. Anzi, si ha quasi la certezza. Oggi potremmo quindi ribaltare il detto pitagorico e sostenere che quasi nulla è numero ... razionale.

In ogni caso, questo strano numero non-numero rappresentò il controesempio che falsificava la teoria dei pitagorici. È facile immaginare che la scoperta creò scompiglio all'interno della scuola. Non si sarebbe più potuto asserire che la natura va interpretata attraverso i numeri. Giamblico riporta l'ipotesi che chi divulgò la scoperta dell'irrazionalità subì la vendetta degli dèi e «perì in mare come empio».

LA MORTE DI PITAGORA E IL GRANDE CONTRIBUTO DEI PITAGORICI

Sembra che, dopo il crollo delle fondamenta teoriche, la scuola continuò a funzionare e che addirittura il suo potere crebbe. Si può quindi ipotizzare che il tentativo di insabbiare la scoperta funzionò. Contemporaneamente crebbero anche i contrasti tra Crotone e Sibari e a guidare le forze di Crotone nella guerra contro la vicina colonia fu il più forte, potente e ricco tra i pitagorici: Milone di Crotone, il lottatore campione di sei olimpiadi. Ed è probabile che molti dei membri della scuola combatterono al suo fianco. Dopo la vittoria su Sibari, i pitagorici assunsero il governo della città e governarono per un po' di tempo, ma il governo pitagorico non fu molto duraturo. Giamblico narra che mentre Pitagora era in viaggio a Metaponto i democratici, capeggiati da Cilone di Crotone, in passato escluso dalla scuola dallo stesso Pitagora, approfittando di una riunione dei pitagorici in casa di Milone, diedero fuoco alla casa. Sopravvissero solo Archippo e Liside: i più giovani della scuola.

Giamblico riporta due diverse versioni sul destino di Pitagora dopo l'annientamento della scuola, una delle quali afferma che il maestro trascorse i suoi ultimi anni di vita a Metaponto dove avrebbe stabilito una nuova scuola.

Secondo l'altra versione la scuola sarebbe sopravvissuta a Crotone dopo la morte di Pitagora e il suo successore sarebbe stato Aristeo di Crotone che sposò Teano, la vedova del suo maestro. Aristeo sarebbe poi stato rimpiazzato da Mnesarco, il figlio di Pitagora.

Per quanto riguarda l'eredità che i pitagorici ci hanno lasciato, vanno sicuramente citati il contributo all'impostazione logico-deduttiva della matematica e la scoperta dei numeri irrazionali: apporti che furono fondamentali per lo sviluppo della matematica. Ma per sottolineare quella che secondo molti è la scoperta più importante dei pitagorici vorrei concludere citando Kitty Ferguson.

Pitagora e i suoi primi seguaci non erano neppure in grado di concepire quale immenso paesaggio si aprisse dinanzi alla porta da loro dischiusa. Da guizzi di indeterminazione inimmaginabilmente piccoli alle innumerevoli galassie, a dimensioni multiple, e forse fino a un'infinità di altri universi. Eppure numeri e relazioni numeriche sembrano aver guidato il cammino in questo labirinto dell'universo fisico con un'efficacia quale lo stesso Pitagora non avrebbe mai osato sperare.

CONSIDERAZIONI DIDATTICHE

Alcuni temi presentati si prestano alla realizzazione di una lezione-spettacolo nella scuola secondaria di primo e secondo grado.

Il tema della correlazione tra matematica e musica può essere introdotto replicando la scoperta del nesso tra musica e numeri che condusse i pitagorici a elaborare la teoria del «tutto è numero». L'esperimento coinvolge una chitarra, un pianoforte (o una tastiera elettrica) e un centimetro per misurare le corde della chitarra.

Si parte dall'ascolto di due mi a un'ottava di distanza eseguiti dapprima insieme sulla tastiera, per verificarne la consonanza, e poi separatamente sulla stessa corda della chitarra. Dalle misurazioni delle lunghezze della parte vibrante della corda per i due mi risulterà il rapporto semplice di 1/2.

Si continua con l'ascolto di un mi e di un fa a un semitono di distanza eseguiti dapprima contemporaneamente sulla tastiera, per verificarne la dissonanza, e poi separatamente sulla stessa corda della chitarra. Dalle misurazioni delle lunghezze della parte vibrante della corda per il mi e per il fa risulterà un rapporto non semplice: di solito vicino a 65/62.

Per brevità, senza ripetere l'esperimento, si può citare il fatto che gli intervalli consonanti di quarta e di quinta darebbero luogo ai rapporti di 3/4 e 2/3 e sottolineare il fatto di aver ritrovato la correlazione tra frazioni semplici e suoni consonanti.

Si potrà quindi descrivere la scoperta dei numeri irrazionali, che mise in crisi la teoria del «tutto è numero», attraverso lo studio del rapporto tra lato e diagonale di un quadrato di lato 1.

Si potrebbe poi concludere con l'ascolto e l'analisi geometrico-musicale di uno degli esempi più sublimi nell'ambito del rapporto tra musica e matematica: il canone 1 a 2 dall'«Offerta musicale» di J. S. Bach, composizione che anticipa idealmente il nastro di Möbius^(?).



Flavio Ubaldini

flavioubaldini@gmail.com

^(?) A tal scopo può essere molto utile un video di dominio pubblico reperibile su YouTube con l'URL: <https://bit.ly/31HnCyF>.