RADDOPPIARE UN CAMPO
Aumentare la superficie di una figura con particolari vincoli

di Fabio Brunelli e Francesco Chesi

INTRODUZIONE

Collaboriamo da anni con l'organizzazione della gara Rally Matematico Transalpino in Toscana. Abbiamo da poco finito di correggere 702 protocolli di uno stesso problema provenienti da centinaia di scuole diverse. I problemi del RMT non sono come quelli della maggior parte dei testi scolastici: le soluzioni spesso sono più di una, i metodi risolutivi lo stesso. La risoluzione viene fatta dalle intere classi divise in gruppi.

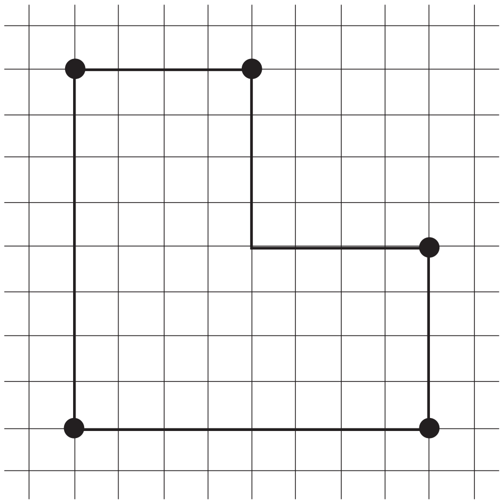
In questo contributo prendiamo in considerazione un problema di geometria che ci è sembrato particolarmente significativo.

IL PROBLEMA DEL CAMPO

Il Campo Raddoppiato (Cat. 5, 6, 7) ©ARMT 2018 – 26° – I prova

Nel suo terreno, all'interno del quale sono piantati cinque alberi, un contadino ha realizzato un recinto provvisorio affinché le sue bestie possano pascolare.

(Il disegno rappresenta il contorno del suo recinto e i cinque alberi, che sono indicati dai punti).



Siccome l'erba scarseggia, il contadino decide di raddoppiare l'area del recinto.

Vuole che il suo nuovo recinto sia di forma rettangolare e vuole anche che i cinque alberi siano sempre sul contorno del nuovo recinto.

Disegnate tutti i possibili recinti di forma rettangolare che il contadino potrebbe realizzare.

Per ogni recinto che avete trovato, mostrate che l'area è stata raddoppiata.

ANALISI A PRIORI DEL PROBLEMA

Compito matematico

Trasformare un poligono concavo (formato da un rettangolo e da un quadrato o da tre quarti di un quadrato) sul contorno del quale sono fissati cinque punti in un rettangolo di area doppia, che mantenga sul proprio contorno i cinque punti nella posizione originaria.

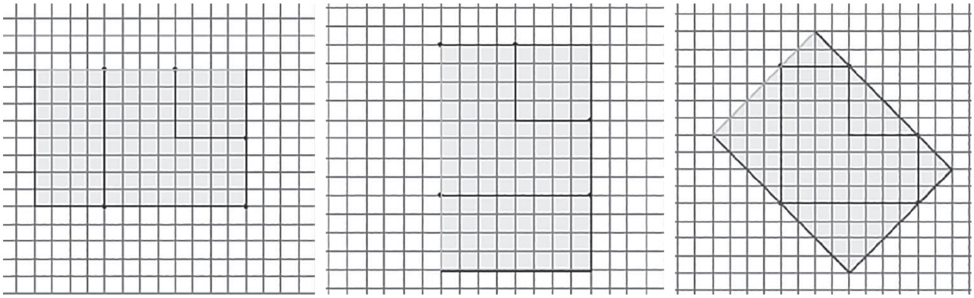
Analisi del compito

- Comprendere che la superficie racchiusa dalla nuova recinzione deve essere il doppio di quella precedente.
- Scegliere un'unità di misura: la cosa più semplice sarebbe prendere per unità un quadretto della quadrettatura e determinare l'area, in quadretti, della prima superficie (48) e quella della seconda (96).
  Si può anche osservare che la figura d'origine è composta da 3 quadrati di area 4×4 e che il nuovo recinto dovrà essere composto da 6 quadrati di area 4×4. Ciò permette di ottenere facilmente le due prime soluzioni (per il terzo si dovrà scomporre questo quadrato in triangoli la cui area vale ½ o ¼ del quadrato).
- Capire il vincolo della posizione dei cinque alberi: restano lì dove sono e devono anche essere sulla nuova recinzione. Poiché gli alberi sono cinque, non possono essere tutti sui vertici del rettangolo (erano sui vertici nella figura d'origine), quindi qualcuno dovrà essere sui lati del rettangolo.
- Provare a tracciare la nuova recinzione tenendo conto dei tre vincoli: deve essere rettangolare e i punti devono essere sui lati o essere i vertici del rettangolo.

Si presentano due casi:

- i lati del rettangolo seguono i lati della quadrettatura. Utilizzare allora il vincolo sull'area, 96, per determinare le dimensioni del rettangolo (si impongono rapidamente 8 e 12, come divisori di 96 e 8, come una delle dimensioni della figura d'origine);
- i lati del rettangolo non seguono le linee della quadrettatura. Procedere per tentativi per tracciare il solo rettangolo che soddisfi il vincolo sulla posizione dei punti. Determinare la sua area e confrontarla con l'area del vecchio campo o confrontarla con quella della figura precedente per scomposizione.

– Concludere che ci sono tre possibilità:



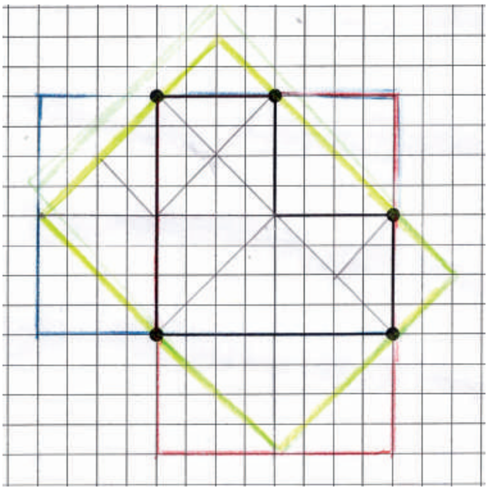
ANALISI A POSTERIORI

Il problema è risultato complessivamente difficile: solo 4 su 702 classi toscane hanno individuato le 3 soluzioni e verificato il raddoppiamento dell'area.

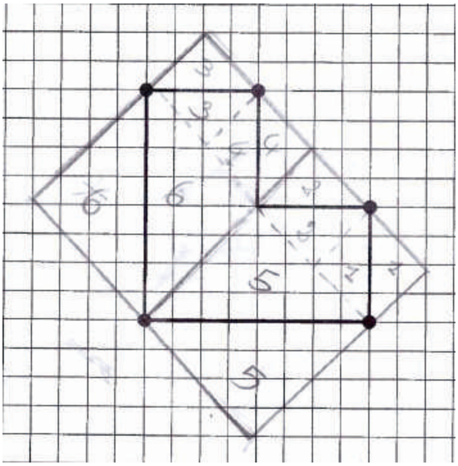
Circa la metà dei protocolli mostra l'incomprensione totale del problema. Le difficoltà evidenziate sono diffuse senza eccezioni nei protocolli dalla quinta primaria alla seconda media.

ESEMPI DALLE SOLUZIONI CORRETTE

Questi alunni di quinta primaria si sono aiutati suddividendo grazie alle loro diagonali i quadrati della figura in triangoli rettangoli congruenti.

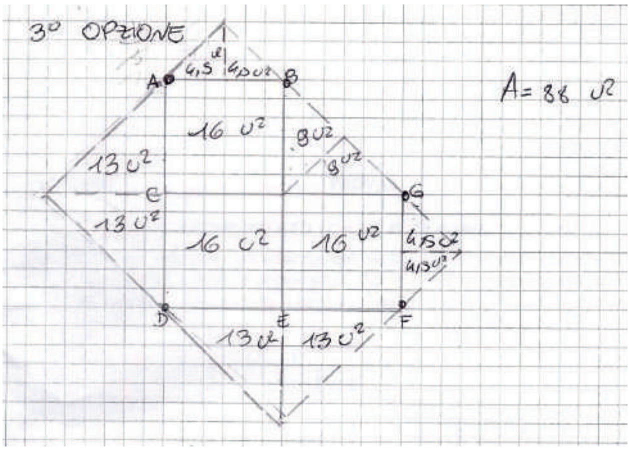


Una classe di prima media ha trovato come unica soluzione quella con i lati del rettangolo obliqui rispetto alla quadrettatura. È apprezzabile come gli allievi si siano preoccupati di suddividere e numerare le parti della figura per dimostrare il raddoppio del campo.

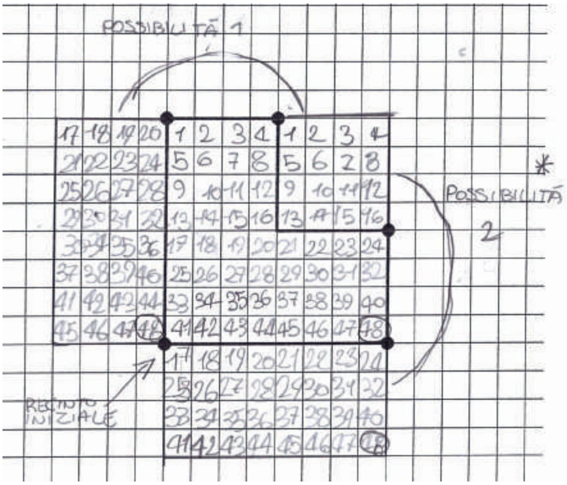


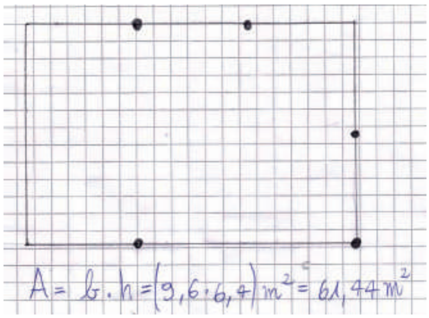
Questo disegno illustra bene la presenza contemporanea di calcoli superflui e dell'uso errato di due unità di misura diverse. Invece che operare sinteticamente a partire dal quadrato di area 16u^2 e da qui trovare metà, quarto e ottavo, gli alunni hanno misurato i lati dei triangoli e calcolato ogni volta la loro area.

Nel ricopiare il disegno sul foglio protocollo, hanno disegnato il campo iniziale con i lati minori lunghi 6 quadretti, e non 4 come nel problema: al momento di calcolare le aree dei triangoli, hanno così misurato in unità (lati di quadretto) i lati dei triangoli, perdendo il confronto col quadrato di 16u^2.



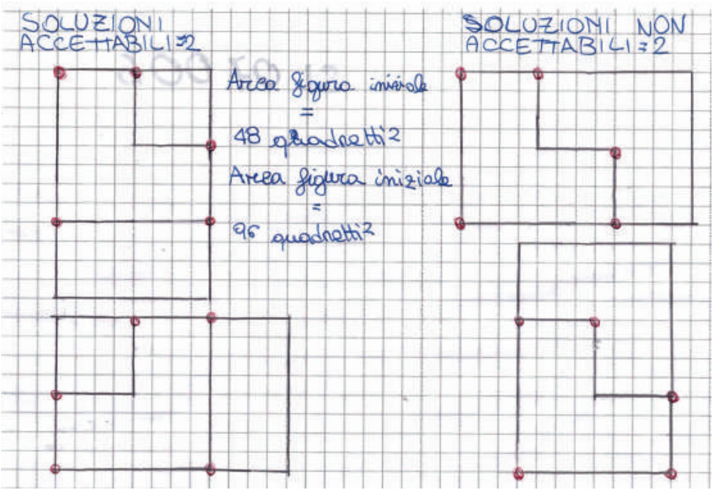
Se in un caso gli alunni hanno visualizzato il conteggio quadratino per quadratino, utilizzato per verificare la misura dell'area doppia del nuovo recinto, nell'altro caso si riscontra un fatto comune: molti alunni sentono spesso il bisogno di calcolare l'area delle figure utilizzando la quadrettatura del foglio.





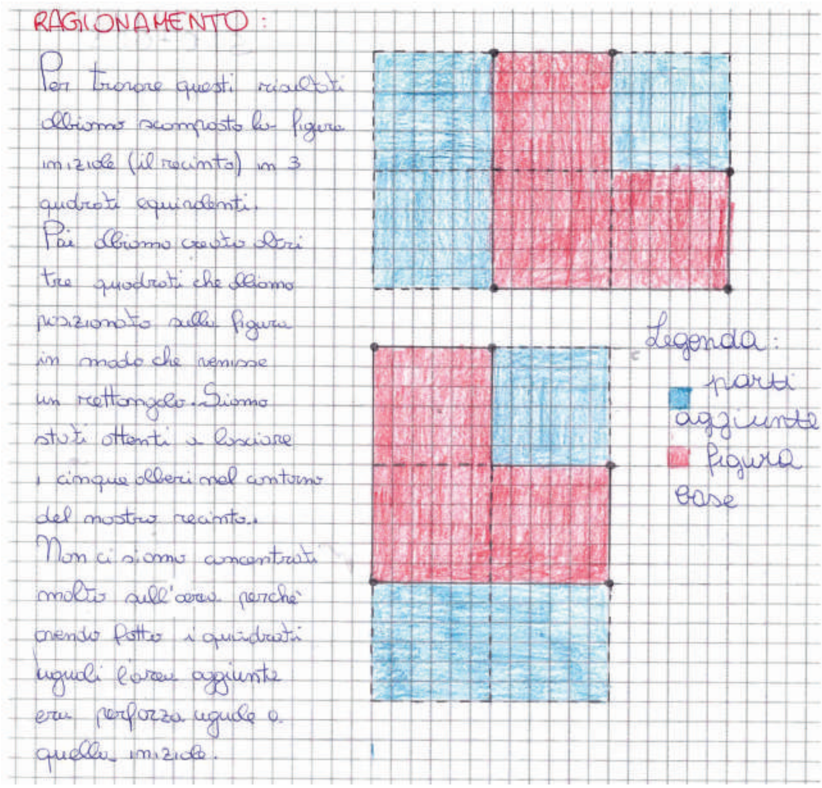
Un gruppo ha misurato con il righello i lati del campo sul foglio, ad esempio il lato maggiore misura 6,4 cm. Per rendere il disegno coerente col testo del problema, hanno deciso una scala arbitraria 1:100 e quindi la misura del lato maggiore risulta 6,4 m. Hanno poi proseguito calcolando l'area del campo iniziale e poi di quello raddoppiato (61,44 m^2).

Le soluzioni corrette sono a volte corredate da esposizioni del procedimento utilizzato. L'esempio riguarda il confronto tra argomentazioni favorevoli e contrarie alla richiesta del problema.



Perché? Queste due soluzioni sono quelle esatte perché nessun albero è all'interno del recinto e inoltre l'area è raddoppiata.	Perché? Queste due soluzioni non vanno bene perché un albero è rimasto all'interno del recinto, però l'area è raddoppiata.

Benché manchi la terza soluzione, l'elaborato presenta un ragionamento completo e curato in cui si evidenzia che il calcolo dell'area è superfluo qualora si operi per equiscomponibilità.



Degni di nota sono infine due esempi di rappresentazione del problema, una algebrica e una frazionaria.

Questi alunni di seconda media utilizzano le incognite per indicare l'area del recinto iniziale e delle parti aggiunte:

$$X = Y = Z$$
$$X + Y = (48 \times 2) = 96 \text{ cm}^2$$
$$X + Z = (48 \times 2) = 96 \text{ cm}^2$$

Il linguaggio delle frazioni viene qui utilizzato per illustrare il procedimento: «*l'area iniziale è 48 cm^2, bisogna scomporre una figura uguale a questa e poi posizionare 1/3 per creare un quadrato e i 2/3 sotto la figura: così l'area è di 96 cm^2*».

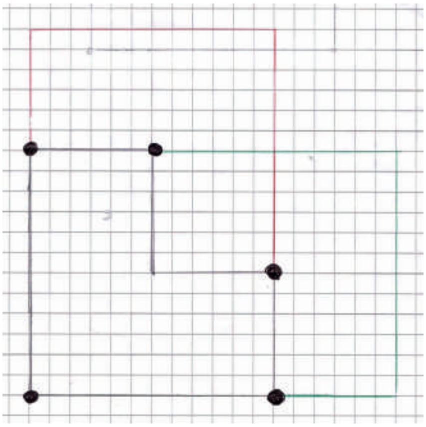
ANALISI DEGLI ERRORI

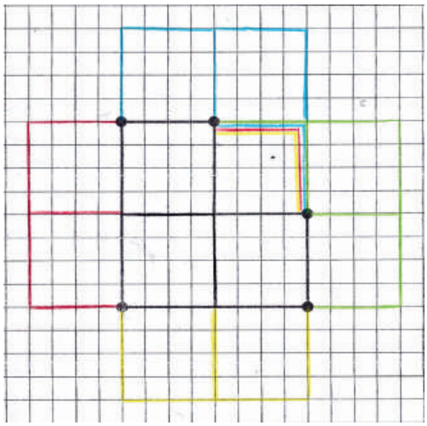
Oltre il 50% degli elaborati ha ricevuto punteggio 0: questo scenario ci ha quindi portati ad analizzare con maggior dettaglio gli errori più frequenti.

1. Ribaltamento della figura in orizzontale o in verticale trascurando che un albero rimane all'interno del nuovo campo.
2. Spostamento degli alberi per porli lungo il perimetro della nuova figura.
3. Rappresentazione di rettangoli equivalenti di area 96 trascurando la posizione iniziale del campo.

1. Ribaltamento della figura in orizzontale o in verticale trascurando che un albero rimane all'interno del nuovo campo

Nell'esempio di sinistra, la figura è stata raddoppiata e per mantenere il vincolo del campo rettangolare le uniche due possibilità sono quelle proposte dagli allievi. Facendo così, si perde però il vincolo della posizione degli alberi.

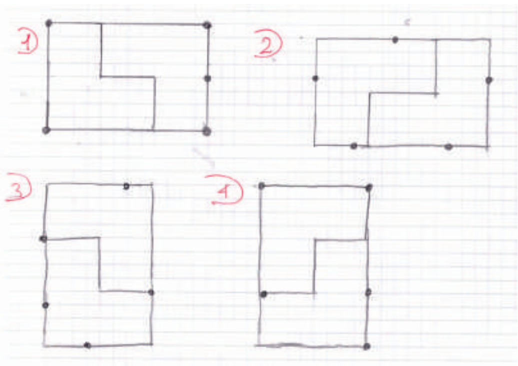




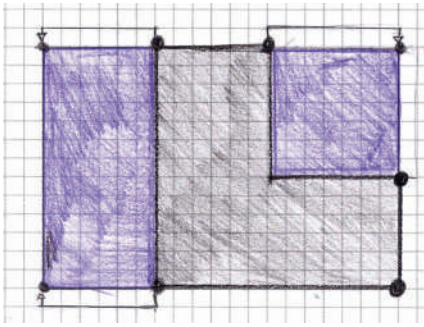
La divisione in quadrati e i punti cardinali, pur rappresentando buone strategie, possono vincolare a una rigida ricerca di soluzioni, con 6 quadrati con i lati posti orizzontalmente e verticalmente, come si evince dall'esempio a destra.

2. Spostamento degli alberi per porli lungo il perimetro della nuova figura

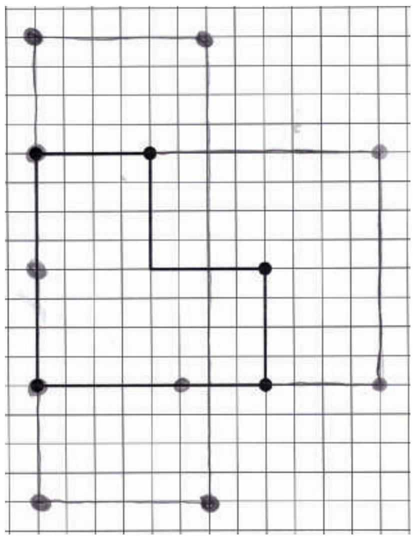
Gli allievi hanno raddoppiato la figura di partenza e tramite rotazioni e simmetrie assiali hanno prodotto quattro risposte. Nessuna è corretta perché gli alberi sono stati spostati.



Gli allievi di questa classe hanno raddoppiato correttamente la figura, una sola delle tre soluzioni, ma hanno spostato erroneamente gli alberi: «*Come si può vedere nel disegno, il colore nero rappresenta il recinto iniziale e la parte viola il raddoppiamento, e il risultato era che gli alberi venivano posizionati nei vertici del recinto. Uno veniva posizionato al lato*».

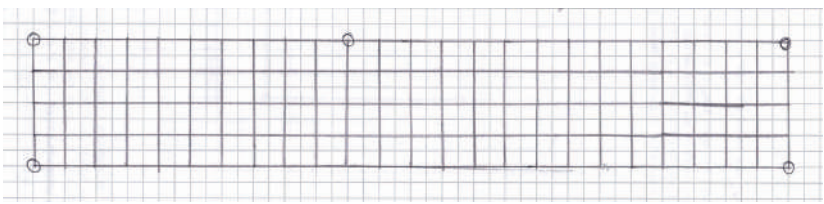


In questo protocollo si evidenziano la cura della *routine* risolutiva scolastica (dati, operazione, spiegazione) e l'approccio numerico, che trascura il significato geometrico del problema. Infatti si legge:

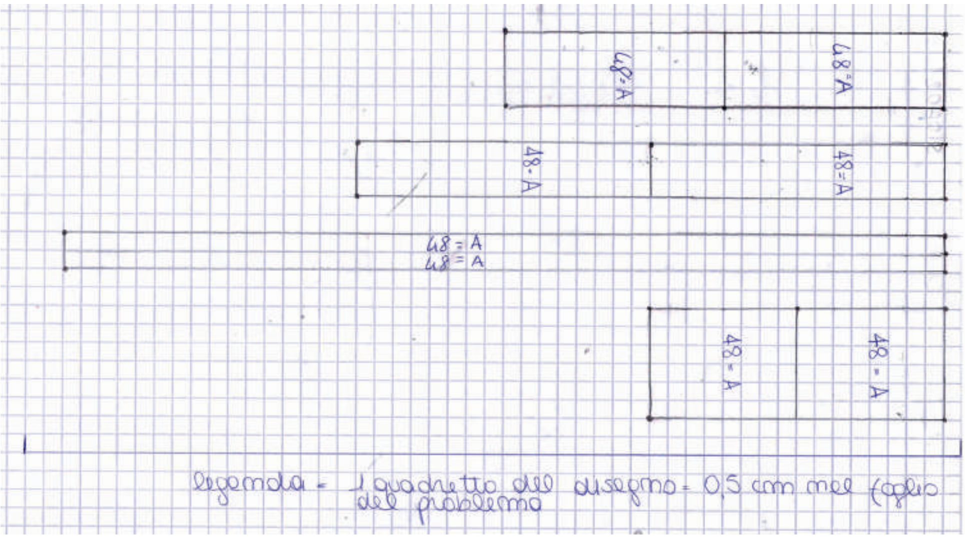
Dati *5 = alberi* *48 = area del recinto* Operazione *8 × 12 = 96 area del nuovo recinto costruito (1°)* *6 × 16 = 96 area del nuovo recinto (2°)* Spiegazione *Abbiamo contato i quadratini del primo recinto ed erano 48. Dopo li abbiamo raddoppiati e abbiamo trovato 96, che è l'area del recinto che deve costruire il contadino. Abbiamo fatto dei tentativi: 8 × 15 ma non tornava e quindi abbiamo riprovato con 8 × 12 e abbiamo trovato 96, quindi si è visto che tornava e il primo recinto è stato trovato. Per trovare il secondo recinto si è provato con il 6, moltiplicandolo per 16, quindi 6 × 16 = 96 abbiamo visto che tornava e abbiamo trovato l'area del secondo recinto.*	

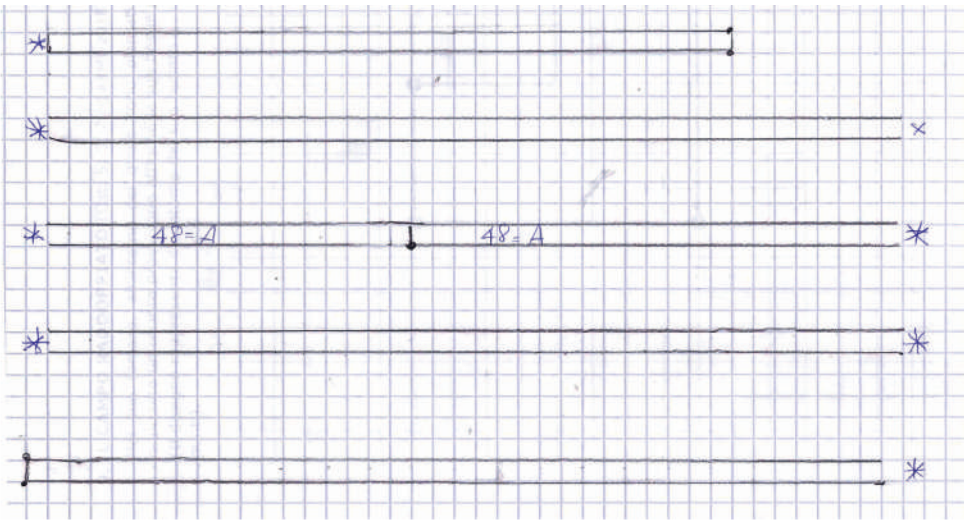
3. Rappresentazione di rettangoli equivalenti di area 96 trascurando la posizione iniziale del campo

Gli allievi hanno qui disegnato una figura di area 96 quadretti. Questo protocollo è esemplare di una certa percentuale di soluzioni basate su rettangoli equivalenti, in cui è evidente la disinvoltura con cui sono stati «sradicati» gli alberi del testo, e ripiantati poi correttamente sui bordi del rettangolo.

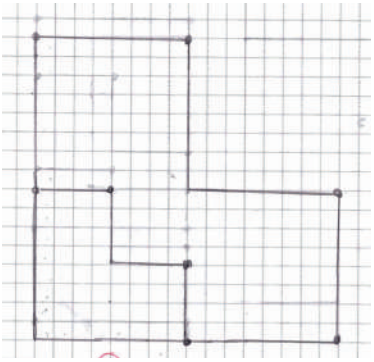


Gli allievi hanno trasformato il campo lavorando sul giustapporre due rettangoli equivalenti di area 48. Così, hanno deformato il campo iniziale e hanno spostato gli alberi posizionandone quattro nei vertici e uno sul punto medio di un lato. Si sono però preoccupati di dare una legenda: «* *la linea continua dove c'è un altro asterisco; un quadretto del disegno del problema = 1 cm del foglio*».





UN ERRORE INTERESSANTE



La soluzione proposta non ha forma rettangolare e presenta gli alberi spostati. Interessante è l'errore del presunto raddoppio dell'area ottenuto raddoppiando le misure lineari della figura: si tratta di un misconcetto ben conosciuto nella ricerca didattica (Castelnuovo, 1963; Spotorno, 1987; Crivelli, 2007; Dedò, 2017).

CONCLUSIONI

I rettangoli a scuola vengono spesso presentati con i lati paralleli ai bordi del foglio, sia quadrettato che bianco. I libri e i docenti si adeguano a questa prassi didattica benché le indicazioni parlino di «Riconoscere figure ruotate, traslate e riflesse» e «Determinare l'area di rettangoli e triangoli, e di altre figure per scomposizione o utilizzando le più comuni formule» per gli *Obiettivi di apprendimento al termine della classe quinta della scuola primaria*, e di «Determinare l'area di semplici figure scomponendole in figure elementari, ad esempio triangoli, o utilizzando le più comuni formule» e «Risolvere problemi utilizzando le proprietà geometriche delle figure» per gli *Obiettivi di apprendimento al termine della classe terza della scuola secondaria di primo grado.* Sarebbe altresì necessario che gli alunni acquisissero quello che Dedò (2017) chiama lo «spirito geometrico», che costituisce sicuramente un'importante opportunità di formazione personale e professionale. L'autrice rimarca purtroppo che ad oggi l'insegnamento della geometria rimane «*un grande disperso* nella scuola italiana di questi primi anni del ventunesimo secolo» e ciò si riflette nella pratica quotidiana della scuola dell'obbligo.

Come evidenziato da Castelnuovo (1963), Colombo Bozzolo (1987), Anselmo *et al.* (2011), e Cottino *et al.* (2011), sia nella scuola primaria che nella secondaria, spesso il rettangolo viene presentato come un oggetto già confezionato piuttosto che come un oggetto di ricerca. Anselmo *et al.* (2011) continuano, affermando che «ci sembra anche che i diversi aspetti di una nozione, per quanto riguarda svariati temi dei programmi, siano abbordati sovente nel corso di una medesima "lezione" e non siano problematizzati». Si ritiene perciò che attività di tipo problematico incentrate sulla costruzione di figure piane porterebbero l'allievo a una migliore consapevolezza della necessità di tutte le proprietà necessarie e sufficienti a definire tale figura piana.

Chi volesse lavorare con problemi simili sul rettangolo può utilizzare i seguenti:

- **I dieci punti (**18° Rally, I prova, problema 8 – categorie 5-7)
- **Il tavolo da spostare** (16° Rally, Finale, problema 24 – categorie 4-5)

– **Completa la figura in modo da ottenere un rettangolo che abbia un lato doppio dell'altro** (SNV 2014 – Livello 5)
– **Quali rette sono assi di simmetria del rettangolo** (SNV 2017 – Livello 5)

Questi problemi sono reperibili ai seguenti indirizzi:
– http://www.gestinv.it – Gestinv 2.0 Archivio interattivo delle prove Invalsi.
– http://www.projet-ermitage.org/ARMT/bp-it2.html – Banca dei problemi del RMT.

Fabio Brunelli
brunelli1950@libero.it

Francesco Chesi
francesco.chesi@gmail.com

Bibliografia

Anselmo B., Bisso C., Grugnetti L.: 2011, *Il rettangolo... non così evidente / Le rectangle... pas si évident*, in «La Gazzetta di Transalpino / La Gazette de Transalpie», n. 1, 7-41.
Castelnuovo E.: 1963, *La Didattica della Matematica*, Firenze: La Nuova Italia.
Colombo Bozzolo C.: 1987, *Nelle nostre classi: l'area del rettangolo*, in «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», n. 10, 934-944.
Cottino L., Gualandi C., Nobis C., Ponti A., Ricci M., Sbaragli S., Zola L.: 2011, *Geometria*, Pitagora.
Crivelli G.: 2007, *La geometria nella scuola secondaria di primo grado: Omotetie e similitudini*, www.unipv.it/iscr/corsi_speciali/dispense/matematica/crivelli/Omotetie%20e%20Similitudini.crivelli%20doc.doc
Dedò M.: 2017, *Alice & Bob 46 – Alla ricerca della geometria perduta 1. Quale geometria per la scuola*, Egea.
Spotorno B.: 1987, *Le similitudini*, in «L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate», n. 10, 1233-1281.