IL RUOLO DEGLI ANGOLI NELLA DEFINIZIONE DEI TRAPEZI

di Daniele Gouthier

CHE COSA CHIEDERE ALLE DEFINIZIONI DEI QUADRILATERI

Quando passiamo dalla trattazione dei triangoli a quella dei quadrilateri, ci scontriamo con alcune potenziali criticità nel dare le definizioni.

Nell'insieme dei quadrilateri abbiamo infatti alcune gerarchie possibili che tengono conto delle proprietà delle figure definite. Al vertice di tutte le gerarchie c'è il quadrato, che è fortemente caratterizzato in termini di lati (tutti congruenti) e di angoli (anch'essi tutti congruenti).

Possiamo poi rilassare queste condizioni rinunciando alla congruenza degli angoli ed ecco che abbiamo i rombi; o a quella dei lati e quindi definiamo i rettangoli.

Gli uni e gli altri hanno la proprietà di avere due coppie di lati paralleli, quindi fanno parte della classe più ampia dei parallelogrammi, ai cui lati e angoli non è chiesto di soddisfare alcuna condizione di congruenza.

A questo punto possiamo voler rilassare anche le condizioni di parallelismo e chiedere che solo una coppia di lati sia formata da lati paralleli: abbiamo così i trapezi, che suddivideremo in scaleni, rettangoli e isosceli.

In questo processo di definizioni gerarchizzate vogliamo rispettare due principi: quello di inclusione e quello di economia.

Per il principio di inclusione, man mano che «togliamo» proprietà dalle definizioni, vogliamo comunque comprendere anche gli oggetti che hanno proprietà ulteriori: ad esempio, un quadrato è un rombo che a sua volta è un parallelogramma.

Per quello di economia, vogliamo usare il rasoio di Occam e non dover considerare proprietà che non sono necessarie a una delle nostre definizioni. Naturalmente, ci può capitare di voler sacrificare l'azione di questo secondo principio sull'altare dell'efficacia didattica, che può richiedere di non essere il più economico possibile per comunicare meglio: c'è un sottile equilibrio tra rigore ed efficacia comunicativa che a volte può richiedere di privilegiare le ragioni della seconda a scapito di quelle del primo.

Nel concreto dei trapezi – ai quali è dedicata questa nostra piccola riflessione – il complesso delle definizioni sui quadrilateri ci deve garantire alcune inclusioni: vogliamo che i parallelogrammi siano trapezi e che i rettangoli siano trapezi isosceli. E vogliamo anche che siano non vuote le intersezioni tra gli insiemi di trapezi rettangoli e scaleni; trapezi rettangoli e isosceli; parallelogrammi e trapezi rettangoli; parallelogrammi e trapezi isosceli; nonché di parallelogrammi, trapezi rettangoli e trapezi isosceli.

Non tutte le definizioni che abbiamo incontrato in libri di testo e manuali ci sembrano soddisfare questi requisiti.

EUCLIDE E UNA PROPRIETÀ DEI QUADRILATERI

Il *Libro I* degli *Elementi* di Euclide inizia con le definizioni, la prima delle quali è la celeberrima «Punto è ciò che non ha parti». La ventiduesima e penultima merita di essere citata per intero.

> **XXII** Delle figure quadrilatere, è quadrato quella che è insieme equilatera ed ha gli angoli retti, rettangolo quella che ha gli angoli retti ma non è equilatera, rombo quella che è equilatera, ma non ha gli angoli retti, romboide quella che ha i lati e gli angoli opposti uguali fra loro, ma non è equilatera né ha gli angoli retti. E le figure quadrilatere oltre a queste si chiamano trapezi.

I curatori dell'edizione Utet del 1970, Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, a questo proposito annotano: come si vede, il termine «trapezio» è usato da Euclide in senso diverso dal nostro. E va detto che i nostri «trapezi» non vengono, del resto, mai considerati in modo autonomo negli *Elementi*.

La successiva e ultima delle definizioni, la ventitreesima, è a proposito del parallelismo e recita come segue.

> **XXIII** Parallele sono quelle rette che, essendo nello stesso piano e venendo prolungate illimitatamente dall'una e dall'altra parte, non si incontrano fra loro da nessuna delle due parti.

Osserviamo quindi che nell'impianto di Euclide si parla di quadrilateri prima che di parallelismo e che i trapezi non hanno una collocazione e uno sviluppo autonomi. Forse è da qui che ha origine quella confusione nelle definizioni «moderne» dei trapezi che cercherò di mettere in evidenza nelle prossime pagine.

Prima di presentare tre definizioni per i trapezi e prima di proporne una quarta che a mio parere supera qualche criticità delle prime tre, antepongo un risultato elementare relativo ad alcuni quadrilateri con due lati paralleli: quelli che al tempo stesso non sono parallelogrammi.

TEOREMA DELLE TRE CONGRUENZE

Dato un quadrilatero con due lati paralleli che non sia un parallelogramma, le tre condizioni

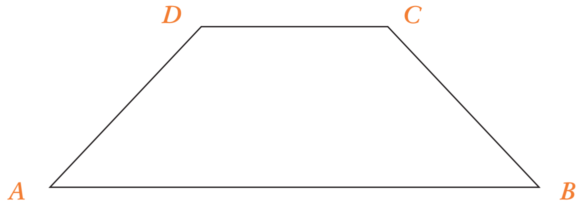
1) avere i due lati non paralleli alle basi congruenti
2) avere gli angoli adiacenti a una base congruenti
3) avere le diagonali congruenti

sono equivalenti.

DIMOSTRAZIONE

Premettiamo l'osservazione che in un quadrilatero con due lati paralleli (basi) i due angoli adiacenti a uno dei due lati non paralleli sono tra loro supplementari.

Primo caso: il quadrilatero ha i due lati non paralleli alle basi congruenti.



Nelle ipotesi date, il quadrilatero non ha angoli retti. Quindi possiamo prolungare i due lati non paralleli alle basi fino a farli incontrare nel punto E.

Per la corrispondenza parallela di Talete, il triangolo EBA è isoscele, quindi sono congruenti gli angoli alla base in A e in B (e per supplementarietà lo sono anche quelli in C e in D).

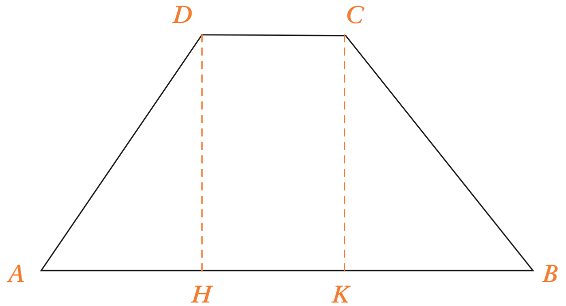
Per il primo criterio di congruenza dei triangoli, AEC e BED sono triangoli congruenti. Quindi in particolare sono congruenti le diagonali AC e BD. E con questo abbiamo mostrato che 1) implica 2) e 3).

Secondo caso: il quadrilatero ha gli angoli in A e B congruenti.

Di nuovo prolungo i lati AD e BC fino a farli incontrare in E. Il triangolo EAB è isoscele e per la corrispondenza parallela di Talete i lati AD e BC sono congruenti.

Per il primo caso, risultano immediatamente congruenti anche le diagonali. E così è completato che 2) implica 1) e 3).

Terzo caso: il quadrilatero ha le diagonali congruenti.



Allora, i triangoli rettangoli ACK e BDH, che hanno i cateti CK e DH congruenti e le ipotenuse congruenti, sono congruenti. In particolare sono congruenti gli angoli CAB e DBA. Per il primo principio di congruenza, sono congruenti i triangoli ADB e ACB. Quindi sono congruenti i lati AD e BC e gli angoli alla base in A e B. E con questo sappiamo anche che 3) implica 1) e 2).

Pertanto le tre condizioni sono equivalenti e il teorema è dimostrato.

Ciò premesso, cerchiamo ora di definire trapezi, trapezi rettangoli e trapezi isosceli. E puntiamo la nostra attenzione sulle definizioni di trapezio e di trapezio isoscele, così come sono date in tre importanti e qualificati testi di riferimento ([1]). Quelle di trapezio rettangolo risultano infatti meno problematiche.

In [Sasso], si legge ([2]):

Definizione A

- Si dice **trapezio** un quadrilatero che ha una coppia di lati paralleli. I due lati paralleli si chiamano basi. I due lati non paralleli si chiamano lati obliqui o semplicemente lati.
- Un trapezio si dice **rettangolo** se uno dei suoi lati obliqui è perpendicolare alle basi.
- Un trapezio si dice **isoscele** se i suoi lati obliqui sono congruenti e le basi non lo sono.

Nel libro di testo oggi più diffuso nelle scuole secondarie di secondo grado, [Bergamini], viene invece proposta questa definizione.

Definizione B

- Un **trapezio** è un quadrilatero con due soli lati paralleli. I due lati paralleli si chiamano basi. I due lati non paralleli si chiamano lati obliqui o semplicemente lati.
- Un trapezio **rettangolo** è un trapezio che ha uno dei lati perpendicolare alle basi.
- Un trapezio **isoscele** è un trapezio che ha i lati obliqui congruenti.

Infine, nei fascicoli che accompagnano il diffusissimo gioco Geometriko [Tortorelli], troviamo:

Definizione C

- Dato un piano, si definisce **trapezio** un qualunque quadrilatero convesso che ha almeno una coppia di lati paralleli (basi).

([1]) Di questi testi considerati, prendo per i fini delle nostre argomentazioni una delle tante edizioni. Mi interessa infatti confrontare diversi punti di vista presenti nella scuola italiana e non «recensire» né tanto meno «criticare» il lavoro degli autori. Non ho quindi proceduto con un'analisi delle trasformazioni che dette definizioni hanno avuto nelle diverse edizioni di una certa opera.

([2]) Sostanzialmente equivalente alla Definizione A è quella che io stesso propongo in [Gouthier] e che riporto qui.

Definizione A'

- Un **trapezio** è un quadrilatero che ha due lati opposti paralleli. I lati paralleli si chiamano basi: la base più lunga si chiama maggiore, quella più corta base minore. Gli altri due lati si chiamano lati (obliqui).
- Un trapezio **rettangolo** ha un lato perpendicolare alle due basi.
- Un trapezio **isoscele** ha i lati obliqui congruenti. Un trapezio che non è isoscele è **scaleno**.

- Si definisce trapezio **rettangolo** un qualunque trapezio in cui almeno uno dei lati residui è perpendicolare alle basi.
- Si definisce trapezio **isoscele** un qualunque trapezio con una sola coppia di lati paralleli in cui i due lati residui (anche detti lati obliqui) sono congruenti.

Per alleggerire la trattazione, nel seguito parleremo di A-trapezi, trapezi A-rettangoli e trapezi A-isosceli per dire che facciamo riferimento alla definizione A. E analogamente per le altre due.

La prima domanda che ci poniamo è se le definizioni A, B e C sono tra loro equivalenti.

La nostra risposta è «non del tutto». In particolare, si può facilmente mostrare quanto segue:

- Le definizioni di A-trapezio e B-trapezio sono equivalenti.
- Ogni A-trapezio (e quindi, per il punto precedente, ogni B-trapezio) è un C-trapezio. Ma non vale il viceversa.
- Le definizioni dei trapezi A-isoscele, B-isoscele e C-isoscele sono equivalenti.

LA RELAZIONE TRA PARALLELOGRAMMI E TRAPEZI

Poniamoci ora altre due domande: i parallelogrammi sono trapezi? E, in caso affermativo, i rettangoli sono trapezi isosceli?

Osserviamo che non è ragionevole aspettarci che i parallelogrammi (esclusi dal teorema delle tre congruenze) siano trapezi isosceli in quanto hanno solo la congruenza dei lati «obliqui», mentre in genere – cioè fatto salvo il caso dei rettangoli – non hanno né gli angoli alla base né le diagonali congruenti.

E di fatti andando a rileggere le definizioni A e C troviamo quanto segue. (Per alleggerire omettiamo la definizione B in quanto equivalente alla A).

I parallelogrammi sono A-trapezi ma non sono trapezi A-isosceli: infatti hanno le basi congruenti.

I parallelogrammi sono C-trapezi ma non sono trapezi C-isosceli: infatti hanno due coppie di lati paralleli.

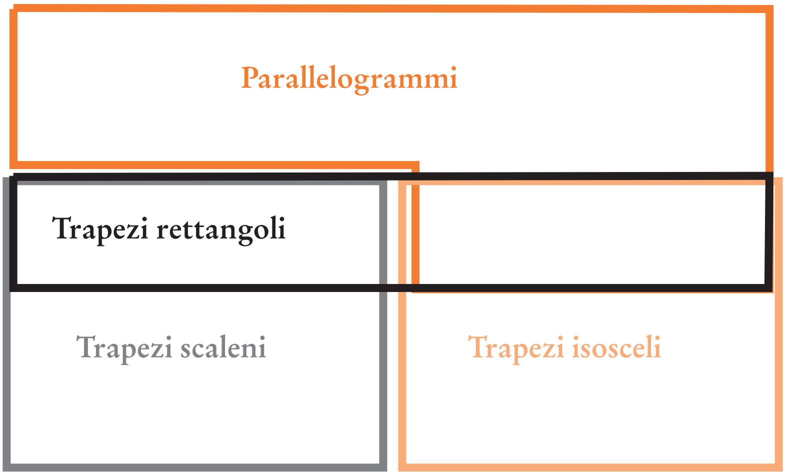
I rettangoli, in quanto parallelogrammi, sono A-trapezi (rispettivamente C-trapezi) ma non trapezi A-isosceli (rispettivamente C-isosceli).

Però, i rettangoli hanno gli angoli adiacenti alle basi congruenti e le diagonali congruenti. Caso strano: abbiamo trovato degli A-trapezi (risp. C-trapezi), i rettangoli, che si caratterizzano come trapezi A-isosceli (rispo. C-isosceli) ma che non lo sono!

Da un certo punto di vista, questo approccio «sottrattivo» richiama la definizione XXII di Euclide secondo la quale, ad esempio, i quadrati non sono rettangoli perché Euclide «toglie» ai rettangoli la proprietà di essere equilateri (così come «toglie» ai rombi la proprietà di essere equiangoli). Nella nostra visione moderna della geometria, la definizione B ha dell'attrito. Tranne che per il fatto di avere le basi congruenti, i rettangoli hanno tutte le caratteristiche dei trapezi A-isosceli (o equivalentemente B- e C-isosceli).

Nel seguito vogliamo ripensare la definizione in modo da accogliere i parallelogrammi tra i trapezi. Non vogliamo discostarci troppo dalla A e dalla C, quindi non ci aspettiamo che i parallelogrammi siano (tutti) trapezi isosceli.

Ci proponiamo che l'intersezione tra i trapezi isosceli e i parallelogrammi sia data dai rettangoli. Vogliamo cioè poter suddividere il diagramma di Venn dell'insieme di tutti i trapezi come in questa figura.



E naturalmente vogliamo che i rettangoli siano esattamente l'intersezione tra i trapezi isosceli, quelli rettangoli e i parallelogrammi.

UN'ALTRA DEFINIZIONE DEI TRAPEZI

Alla luce del teorema delle tre congruenze proponiamo questa definizione.

Definizione D

- Un **trapezio** è un quadrilatero che ha due lati paralleli. I due lati paralleli si chiamano basi. I due lati non paralleli alle basi si chiamano lati obliqui o semplicemente lati.
- Un trapezio **rettangolo** è un trapezio che ha uno dei lati perpendicolare alle basi.
- Un trapezio **isoscele** ha i lati obliqui congruenti e gli angoli adiacenti a una base congruenti (3).

(3) Questa è la definizione che, al momento della stesura del testo, si trova su Wikipedia.

Da questa definizione segue che i trapezi isosceli possono essere suddivisi in due insiemi disgiunti: quello dei trapezi isosceli che hanno basi non congruenti e quello dei rettangoli.

La definizione proposta può essere ulteriormente alleggerita grazie al classico teorema.

TEOREMA

Un trapezio che ha gli angoli adiacenti a una base congruenti è isoscele.

DIMOSTRAZIONE

Se gli angoli adiacenti a una base sono retti, il trapezio è un rettangolo e quindi è isoscele. Se invece non sono retti, prolunghiamo i lati obliqui fino a farli intersecare nel punto V. Il punto V determina con ciascuna delle basi un triangolo isoscele (questo perché gli angoli adiacenti a entrambe le basi sono congruenti). I lati obliqui del trapezio sono differenze dei lati, rispettivamente congruenti, dei due triangoli isosceli. Dunque sono tra loro congruenti.

Pertanto possiamo alleggerire la definizione D, proponendo la seguente che le è equivalente.

Definizione D'

- Un **trapezio** è un quadrilatero che ha due lati paralleli. I due lati paralleli si chiamano basi. I due lati non paralleli alle basi si chiamano lati obliqui o semplicemente lati.
- Un trapezio **rettangolo** è un trapezio che ha uno dei lati perpendicolare alle basi.
- Un trapezio **isoscele** ha gli angoli adiacenti alla base congruenti.

Non possiamo invece alleggerire la definizione facendo affidamento solo sulla congruenza dei lati obliqui, perché un D-trapezio con i lati obliqui può essere tanto un trapezio isoscele quanto un parallelogramma, che isoscele non è perché non ha angoli alla base e diagonali congruenti.

Come mai questa asimmetria tra lati e angoli?

Nel nostro ragionare sulla geometria sintetica siamo portati a dare maggior ruolo ai lati. Solo nella classificazione dei triangoli (che sono rigidi) le definizioni date con i lati coincidono con quelle date con gli angoli. Potremmo schematizzare questa corrispondenza così: disuguaglianze tra i lati ↔ disuguaglianze tra gli angoli (opposti).

Per i quadrilateri, le cose si articolano molto. Anche se, forse, la «natura» dei trapezi si esprime meglio nei termini degli angoli piuttosto che in quelli dei lati.

Definizione D*

- Un **trapezio** è un quadrilatero che ha due angoli adiacenti a uno stesso lato supplementari.

- Un trapezio **rettangolo** è un quadrilatero che ha due angoli adiacenti a uno stesso lato retti.
- Un trapezio è **isoscele** se ha due coppie di angoli adiacenti a uno stesso lato congruenti.

Nonostante le tre definizioni D, D' e D* siano equivalenti, non proporrei di usare la D* che, pur più intrinsecamente corretta, è troppo lontana dall'abitudine d'uso. La più adatta alla didattica è probabilmente la D, che pure è una versione ridondante della D'.

Daniele Gouthier
gouthier.daniele@gmail.com

Bibliografia

[Bergamini]
Massimo Bergamini, Anna Trifone, Graziella Barozzi, *Corso base di matematica*, Zanichelli
[Euclide]
Euclide, *Elementi*, a cura di Attilio Frajese e Lamberto Maccioni, Utet
[Gouthier]
Daniele Gouthier, *Il bello della matematica*, Pearson Bruno Mondadori
[Sasso]
Leonardo Sasso, Enrico Zoli, *Colori della matematica*, DeA scuola Petrini
[Tortorelli]
Leonardo Tortorelli, *Geometriko*, dispensa di gioco (materiale autoprodotto per i partecipanti al gioco)