INDEFINITAMENTE E INDEFINIBILMENTE FRATTALI

di Sandra Lucente

INTRODUZIONE

Ecco un articolo frattale sui frattali. Starete sorridendo, pensando che effettivamente è possibile in un numero finito di caratteri descrivere un processo che si ripete infinite volte. Chi scrive vuole anche raccontare in modo frattale: si propongono laboratori sui frattali a scala diversa cioè in relazione all'ordine di scuola a cui ci si riferisce. C'è (come al solito per i frattali) un problema di dimensione: il racconto nelle nostre pagine bidimensionali deve guadagnare ad ogni passo profondità. Per questo nel processo limite si arriverà ad immaginare i contenuti di un corso sui frattali per gli studenti universitari. In questo ultimo caso si mostra quanto sia difficile dare la definizione di frattale e quanto sia facile invece immaginare molti di questi oggetti. Questa introduzione è proprio il frattale dell'articolo: per comprendere come è fatta si deve procedere passo per passo, svolgendo la lettura.

UN LABORATORIO PER LA SCUOLA DI INFANZIA. FRATTALE DA *FRACTUS*?

Ho sempre immaginato di regalare parole ai bambini. Se regaliamo una parola come «frattali» possono però spaventarsi perché frattale viene dal latino *fractus* e va interpretato non come «rotto» ma come «scomponibile». I giocattoli si rompono a volte per comprenderli, ma in questo laboratorio (durato circa due ore) cercheremo di non fare troppi danni. Il materiale che ci serve è più complicato che nei laboratori successivi perché nella scuola di infanzia la forma va toccata.

Per ogni bambino occorre una mezza conchiglia di tipo bivalve come un canestrello. Si incolla la conchiglia al centro di un cartoncino quadrato formato minimo 15×15; bisogna anche preparare altri cartoncini delle stesse dimensioni ma con un foro al centro, grande abbastanza per ospitare la conchiglia. Si chiede «cosa è questa?», e probabilmente tutti diranno che è una conchiglia, ma noi li sorprenderemo dicendo che quella non è solo una conchiglia, potrebbe essere la gonna di una ballerina. Sovrapponendo il foglio bucato disegneremo attorno alla conchiglia la ballerina. Riprenderemo il gioco dal principio. Mostrando il foglio con la conchiglia chiediamo ancora «cosa è questa?», qualcuno più diffidente dirà che non è una conchiglia ma è un petalo di un fiore o la coda di un pesce pagliaccio. Si sovrappongono fogli e si ottengono disegni vari che rilegati danno un bel testo pop-up. Appariranno la chioma di un pino marino o un mezzo fiocco ecc. Dopo aver consegnato agli studenti la forma della conchiglia, potremmo anche consegnare la parola *concoide*. Essa appare anche in geologia (rottura della selce) e in arte (la parte terminale di edicole votive). In questa prima parte del laboratorio non abbiamo ancora scomposto nulla, niente è stato «fratturato» nemmeno geometricamente.

Ora se prendiamo un petalo di rosa e lo mostriamo, qualcuno potrebbe dire che è una conchiglia leggera e rossa. Ma qui iniziamo un altro gioco: come avete fatto a capire che era un petalo di rosa? Se ne avessi preso uno più piccolo lo avreste capito lo stesso? La rosa si riconosce dal suo petalo, dalla parte che si ripete anche se in «scala» diversa: petali grandi e petali piccoli. Questi oggetti che hanno elementi che si riconoscono da una loro parte che si ripete in scala diversa si chiamano appunti *frattali*. Si possono mostrare dei mandala frattali, cioè dei 'fiori' matematici più complicati della rosa, per colorare i quali si ripete un ciclo di colori in modo da rispettare la somiglianza a scala diversa. Infine, si chiede ai bambini di immaginare che esista un negozio in cui possiamo prendere tutti i petali grandi e piccoli che ci servono e creare un bel fiore frattale; termineremmo mai?

Si potrebbe anche portare loro un cavolo romano e mostrare che ogni piccola protuberanza è piramidale come il cavolo stesso. Per scoprirlo dobbiamo tagliare quel piccolo pezzo: frattale da *fractus*, appunto. In questo caso succede però qualcosa di ancora più particolare: il piccolo si trova nel grande che gli somiglia! Insomma, l'omotetia è interna (ma questo non lo diciamo!). Ci basta aver insegnato che la stessa forma ha più scopi, che non importa la grandezza di una forma per riconoscerla e che certe volte la stessa forma si ripete dentro di sé.

Figura **1** – Laboratorio sulla concoide.
Polignano (BA) Biblioteca Comunale 2021.

UN LABORATORIO PER LA SCUOLA PRIMARIA. FRATTALE PERCHÉ AUTOSIMILE?

Kelly Robles, psicologa statunitense, ha concluso la sua tesi di dottorato sostenendo che il nostro occhio (o cervello o cuore?) ha una passione innata per le figure autosimilari. La ragione di questa convinzione è in un'ampia statistica che ha coinvolto 178 soggetti di cui 86 adulti e 92 bambini dai 3 ai 10 anni a cui sono state proposte varie immagini, una sola delle quali autosimilare. Queste immagini frattali sono risultate più attraenti per entrambi i gruppi di soggetti. I neuroscienziati sostengono che questo è dovuto alla nostra familiarità con l'autosimilarità degli alberi con cui siamo in relazione da centinaia di migliaia di anni. Il laboratorio che proponiamo per la scuola primaria riguarda proprio la struttura frattale degli alberi ed è stato testato più volte nei gruppi di scuola primaria in visita al Museo della Matematica e all'Orto botanico dell'Università di Bari. Il materiale che ci occorre è molto semplice: fogli a quadretti e pennarelli. La durata del laboratorio è variabile, da 1 a 6 ore.

In una prima fase si chiede di disegnare un albero su un foglio A4 piegato a metà sul lato lungo in modo che il disegno parta dalla piega del foglio.

Le prime osservazioni riguardano la simmetria degli alberi.

- La simmetria verticale. Se si rompe questa simmetria probabilmente c'è stato un fulmine oppure qualcuno si è seduto su un ramo. Quindi è una simmetria necessaria per capire l'evoluzione e la storia dell'albero.
- La simmetria orizzontale. Radici grandi e profonde sono necessarie per alberi grandi e rami che vanno più in alto.

Ci si aspetta che in pochi abbiano disegnato le radici, allora si apre il foglio e si chiede di disegnarle sulla parte bianca.

Abbiamo imparato a vedere qualcosa di nascosto: questo è un ottimo esercizio matematico. Nella seconda parte del laboratorio, proseguiamo ripiegando un altro foglio e chiedendo di disegnare sulle due metà rispettivamente un ramo spoglio e una foglia con tutti i suoi dettagli. Cosa scopriamo?

- Reiterazione del pattern. Il ramo è stato disegnato con la stessa procedura con cui è stato disegnato l'intero albero. C'è un elemento che si ripete.
- Omotetia e riscalamento. All'interno della foglia c'è un piccolo albero costituito dalle venature. Possiamo mostrare i dipinti di Magritte con gli alberi-foglia in cui il riscalamento è reciproco: dalla foglia all'intero albero.

La terza parte del laboratorio mira invece a ricostruire la regola dell'albero. Si prende un gigantesco foglio a quadretti (ad esempio quattro A3 uniti tra loro) e si stabilisce un pattern costituito da un trattino che prosegue con un trattino sul bordo del quadretto (verticale oppure orizzontale) e due inclinati rispetto al bordo del quadretto. Si chiede ai ragazzi di proseguire con questa regola ad ogni fine trattino. Già al secondo passo si osservano 12 trattini. Si lascia libertà sulle lunghezze dei trattini e sull'angolo di inclinazione dei trattini. La discussione porta a molte domande:

- Quanti trattini ad ogni passo? Eviteremo la risposta al passo n-esimo, ma potremo apprezzare la velocità con cui la figura è cresciuta.
- Che lunghezze abbiamo dato ai trattini per farli somigliare ad un albero? Probabilmente useremo trattini più piccoli per passi di livello più alto.

- Che inclinazioni abbiamo dato ai trattini obliqui? Probabilmente alternato destra e sinistra per riproporre l'omotetia.
- Per avere un albero più credibile ci voleva però anche lo spessore dei trattini che distinguesse tronco e rami. Le circonferenze concentriche nella sezione del legno sono un altro pattern nascosto. Portiamo in aula qualche sezione di ramo (facile da reperire in periodo natalizio perché si usano come sotto-candele). Qui si possono mostrare anche alcune tavole del Codice Atlantico in cui Leonardo fa questi studi, oppure rivedere il bellissimo libro di Munari che racconta come disegnare un albero.

Infine, si cercano 'alberi' matematici che non sono alberi per la botanica: un cavolfiore tagliato in sezione, alcune antenne, alcune piume, alcune nuvole, il letto di un fiume, ma soprattutto il nostro corpo. Il bambino riscopre le simmetrie: braccia e gambe dal tronco come fossero radici e rami; quindi i riscalamenti: mani e piedi e dita come rami più piccoli; poi vede quel che è nascosto: alberi sono i bronchi, il sistema cardio-circolatorio con le sue omotetie che portano fino alle vene più piccole. Queste scoperte devono essere fatte muovendo il corpo, allargando gambe, braccia, distanziando le dita di mani e piedi, e infine si può creare una danza che dia per reiterazione la regola del bosco: una coreografia di tanti alberi. Se qualcuno non va a tempo o si rifiuta di danzare l'albero non appare più. Questo genere di laboratori è stato anche proposto in contesti di arteterapia, per scoprire l'importanza di ciascuno di noi nella comunità.

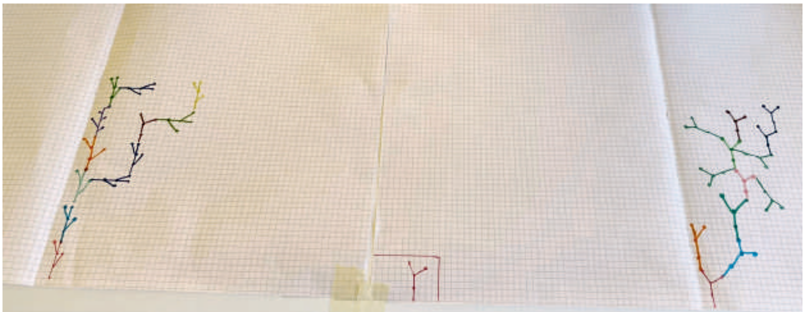


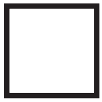
Figura **2** – Alcuni passi iniziali di questo laboratorio alla Notte Europea dei Ricercatori, Bari 2022.

UN LABORATORIO PER LA SCUOLA SECONDARIA DI PRIMO GRADO. FRATTALE PERCHÉ INFINITO?

Il primo materiale che ci occorre per il laboratorio frattale in una scuola secondaria di primo grado è un quaderno a quadretti che abbia in ultima pagina un formulario di geometria. Un noioso ripasso è l'ottimo inizio di questo laboratorio. Mentre ripassiamo formule a bruciapelo facciamo una domanda strana:

- Siamo sicuri che se l'area di una figura è finita il suo perimetro è finito?

Quando i ragazzi (che a questa età hanno poca dimestichezza con l'infinito) ci guarderanno male e diranno che ovviamente una figura di area finita ha perimetro finito, daremo loro ragione e riprenderemo il lavoro da formulario, partendo dalla più facile delle figure: il quadrato. Apriamo il quaderno e verifichiamo le formule di area e perimetro tracciando a penna quadrati di lato 1, 2, 3, 4, 9 quadretti:

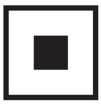


$$2p = 4l$$
$$Al = l^2$$

Proprio quando la noia sta per prendere il sopravvento, lanciamo una gara di domande su queste formule. Il buon insegnante deve far emergere le seguenti:

- Bastano i nostri cinque disegni a garantire che la formula valga per ogni quadrato?
- Se conoscessi l'area di un quadrato potrei ricavare il perimetro?
- Se si rimuove un pezzo della figura l'area aumenta o diminuisce?
- Se si rimuove un pezzo della figura il perimetro aumenta o diminuisce?

Riapriamo il quaderno e con la matita dividiamo il quadrato di lato 9 in nove quadretti colorando a penna quello centrale, cancelliamo le divisioni fatte e osserviamo che nella nuova figura l'area è diminuita (72 quadretti contro gli 81 del quadrato prima della rimozione) mentre il perimetro è aumentato (9x4+3x4).



$$2p_1 = 4l + 4l/3 > 2p$$
$$A_1 = l^2 - l^2/9 < A$$

Torniamo alla discussione e iniziamo un formulario nuovo che includa questa nuova figura. Adesso chiediamo ai ragazzi come si può ripetere l'operazione che abbiamo fatto in *scala diversa*. Non è difficile condurli ad una nuova divisione che elimini 8 quadratini più piccoli al centro dei quadrati rimasti. Ancora una volta l'area diminuisce e il perimetro aumenta. Potremmo di nuovo ampliare il nostro formulario, ma è più efficace sorprenderli chiedendo loro di tagliare la figura ottenuta e mettere insieme quelle di 8 di loro in modo adiacente così da ricreare una figura simile a quella precedente ma di scala diversa. Si accorgeranno che non occorrono solo 8 quadrati bucati, ma anche un quadrato colorato centrale per chiudere questa figura.

Adesso sveliamo la parte matematica del gioco:

- Stiamo costruendo il Tappeto di Sierpinski, descritto dal matematico polacco nel 1916.
- Il gioco può continuare dall'interno e dall'esterno. Il tappeto non è una figura che si disegna con un numero finito di passaggi ma tramite una procedura infinita (dividi ogni lato per tre, manda le quattro parallele ai lati per i punti di divisione e cancella il quadrato centrale).

- Si può poi proporre di fare il triangolo di Sierpinski invece del tappeto e di cercarlo nell'arte (ad esempio nei pavimenti comateschi di Santa Maria Maggiore a Roma) rendendo il laboratorio interdisciplinare.
- La figura diventa sempre più complessa. Potremmo misurare in qualche modo questa complessità: ad esempio, chiedendo aiuto alla collega di Tecnologia, potremmo passare dal quaderno a quadretti alla carta millimetrata, osservando come il tempo di colorazione di un passo superiore è molto maggiore del tempo di disegno del passo precedente.
- La *figura limite* avrà area nulla e perimetro infinito! Nel formulario dei frattali la domanda sulla finitezza di area e perimetri non è più insensata.

In questo laboratorio, che richiede fino ad una dozzina di ore, i partecipanti hanno conosciuto un frattale molto importante, hanno compreso che la relazione tra perimetro e area non va mai data per ovvia e che ci sono figure che si sviluppano all'infinito. Inoltre, hanno avuto un accenno di idea sulla misura della complessità.

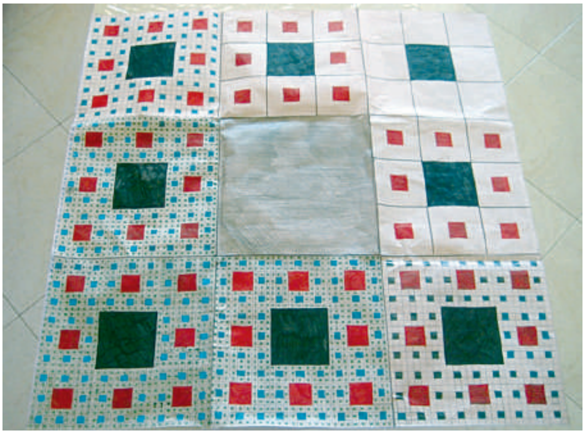


Figura **3** – Tappeto di Sierpinski con evidenza di passi diversi. Realizzato in classe a Conversano (BA) nel 2008.

UN LABORATORIO PER IL BIENNIO DI UNA SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO. FRATTALE PERCHÉ RIEMPIE?

La geometria euclidea del biennio della scuola secondaria è la prima grande sfida assiomatica e astratta per gli studenti. Avendo però una visualizzazione «concreta» nelle forme attorno a noi, lo studente è portato a sviluppare concetti errati. Ad esempio, l'uso di «linea» per «linea retta» è un misconcetto piuttosto diffuso. Il laboratorio riguarda curve di riempimento per riflettere sul concetto di dimensione topologica. Non ci sorprenda un così grande anticipo di un'idea così profonda. Innanzi tutto il concetto di dimensione intera è negli *Elementi* di Euclide, poi i ragazzi hanno continuamente a che fare con una cinematografia che parla di altre dimensioni.

Il laboratorio della durata di circa sei ore è pensato per una classe che abbia già acquisito la nozione di similitudine.

Nella prima parte del laboratorio, dopo un *brainstorming* su cosa sia una linea, una retta, un piano, una superficie, si cercano queste parole negli *Elementi* di Euclide. Si arriva a immaginare che il punto scorrendo riempie la linea, la linea scorrendo riempie il piano, il piano scorrendo riempie lo spazio. Al solito si parte facendo emergere le domande:

- Quale linea riempie il piano?
- E una linea può riempire lo spazio?

Una retta che scorre genera parallele, ma anche una circonferenza e tutte le sue concentriche riempiono il piano e anche un triangolo equilatero (solo bordo) e tutti i suoi triangoli simili. Siamo arrivati subito al concetto di pattern, di ripetizione, che però nel continuo non si distingue. D'altra parte, abbiamo ripetuto infinite volte la stessa immagine.

Adesso sorprendiamo gli studenti presentando le curve di riempimento. Mostriamo la curva di Peano che riempie il piano e la curva di Hilbert che riempie lo spazio. Si parte da tre lati di un quadrato (una specie di U verso il basso) che va ridimensionata (per riduzione) e quadruplicata su un ulteriore foglio delle stesse dimensioni, ponendo con simmetria verticale due delle U ruotate di 90 gradi. Quindi le nuove quattro U vengono raccordate facendo apparire una specie di castello merlato. Questa nuova figura su un altro foglio viene ridotta, quadruplicata con le medesime rotazioni e il castello merlato è scomparso in un labirinto. Possiamo nuovamente ridurre, quadriplicare con rotazione, raccordare. In questo passaggio si potrebbe usare la fotocopiatrice.

È il tempo delle domande:

- Quanti passi posso fare con la carta?
- Osservo che le regole costituiscono un algoritmo. Se usassi Geogebra potrei fare passi più alti.
- Se uso la mente, senza disegnare, quanti passi posso fare?
- Se questa curva fosse una strada sull'acqua, sta aumentando o diminuendo ad ogni passo la sua lunghezza?
- Cosa succede alla figura limite? Qui si deve far notare che la figura limite è continua (diremmo da matematici adulti) mentre quando univamo infinite rette o circonferenze o triangoli avevamo sì un processo iterativo ma non ottenevamo un'unica curva finale.

Questa curva di riempimento ha anche una versione tridimensionale. Quindi la dimensione 1 riempie la dimensione 3. Da una parte la nozione di dimensione è messa in crisi da queste costruzioni. Dall'altra noi abbiamo già questa esperienza: il gomitolo di un cotone sottile visto da lontano è una palla. Ma soprattutto il gomitolo del

DNA, che sfrutta varie proprietà matematiche: la ripetizione delle quattro molecole, la regola che dà l'elica, la disposizione a gomitolo per occupare pochissimo spazio. È molto interessante che la curva descritta non si interseca mai, anche se la prima idea di curva che riempie il piano dovuta a Peano fu realizzata con intersezioni. Se i ragazzi apprezzano possono anche realizzarla e metterla a confronto con il nostro modello.

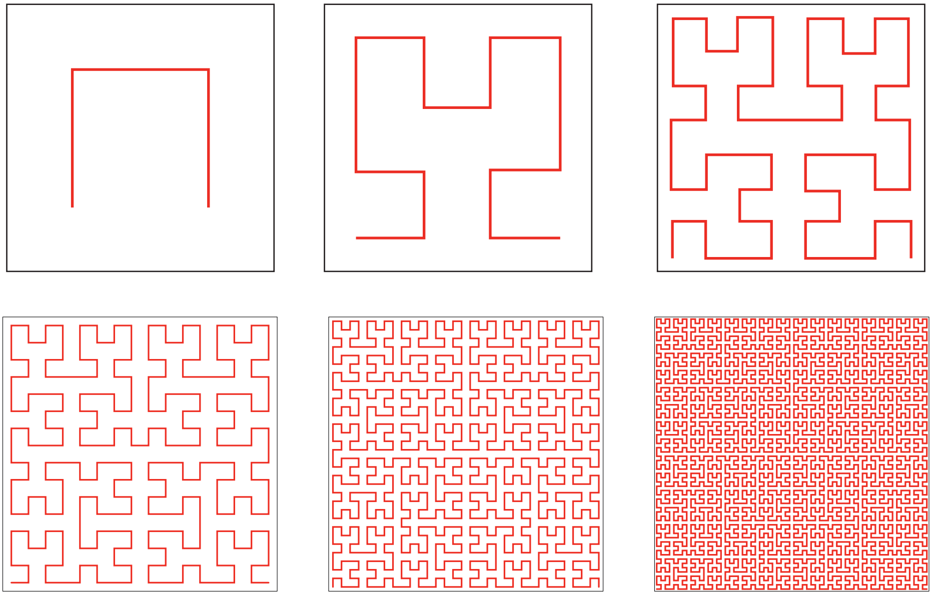


Figura **4** – Curva di Hilbert nel piano, primi 6 step.
Fonte Wikipedia.

UN LABORATORIO PER IL TRIENNIO DI UNA SCUOLA SECONDARIA DI SECONDO GRADO. FRATTALE PERCHÉ A DIMENSIONE FRAZIONARIA?

Il laboratorio proposto per il triennio segue il classico approccio alla dimensione frazionaria dei frattali autosimilari che fu già suggerito come attività didattica da Emma Castelnuovo. Dapprima si costruisce il fiocco di neve di Van Koch partendo da un triangolo equilatero e proseguendo per trisezione di ogni lato e sovrapposizione di triangoli equilateri, immaginando il processo limite che porta ad una figura di area finita e perimetro infinito. Quello che cambia in questo caso è un approccio quantitativo. Si fa osservare che:

- un segmento diviso in tre parti uguali dà banalmente tre segmenti, ovvero 3^1;
- un quadrato a cui si divida ogni lato in tre parti dà nove quadratini, ovvero, 3^2;
- un cubo che abbia gli spigoli divisi in tre parti uguali dà nove cubetti (come un Rubik), ovvero 3^3;

Si congettura che questo esponente sia la dimensione dello spazio in cui l'oggetto è immerso. Ovvero

$$(\textit{numero di parti in cui si divide})^{\textit{dimensione}} = \textit{numero pezzi dopo la divisione}$$

Si prova questa equazione su altre figure, ad esempio un triangolo diviso in triangoli tramite bisezione dei lati dà 4 triangoli.

Si torna al fiocco di Koch e si osserva che ogni lato è diviso in tre parti ma la divisione produce quattro pezzi, dunque non esiste un numero D intero tale che $3^D = 4$. Se i ragazzi hanno già il concetto di logaritmo si osserva che $D = log_3 4$ e questa dimensione non intera sembra dare una misura di quanto il frattale sia diverso da un poligono costruito in un numero finito di passi. In qualche modo si intuisce che l'infinità dei passi si è nascosta nella coda decimale di D. Si mette in guardia lo studente che questo non è sempre vero (si veda il prossimo paragrafo), ma è una delle caratteristiche di molti frattali.

Il laboratorio si conclude rifacendo l'esercizio con un lato del fiocco che si divide in 5 parti, se ne cancellano due e si giustappongono 2 quadrati. In questo caso si ha $D = log_5 9$. Cosa differenzia i due valori di D? Sono entrambi compresi tra 1 e 2 ma il secondo è più grande. Questo indica che le curve di questo tipo hanno una complessità maggiore delle curve piane regolari (dimensione 1) e che la seconda è ancora più complessa. Non si tratta solo di una variazione matematica: misurare l'irregolarità è fondamentale ad esempio in medicina. Chiedersi a quale curva di Koch assomiglia il bordo di una cellula malata può anche indicare quale sia la terapia migliore da adottare.

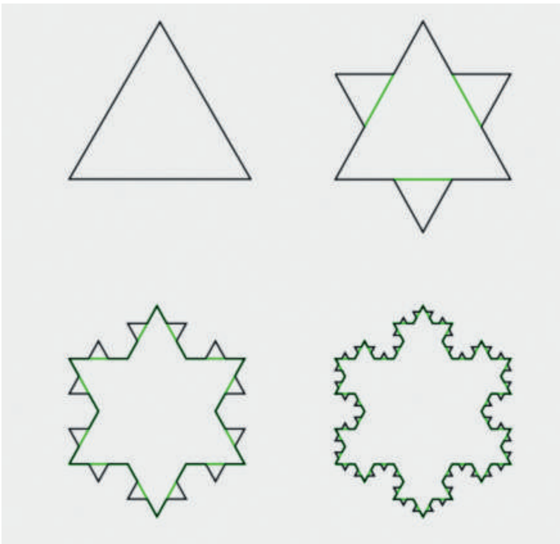


Figura **5** - Curva di Von Koch, primi 4 step.
Fonte Wikipedia.

IL CORSO UNIVERSITARIO. FRATTALE PERCHÉ HA DIMENSIONI DIVERSE

Vorrei accennare anche all'organizzazione di un corso superiore sui frattali. Oltre che per un corso universitario si può immaginare questa struttura per un corso di formazione docente. Conoscere più in profondo anche quello che non si racconta poi in classe aiuta la creazione di laboratori simili ai precedenti. Secondo chi scrive quello che deve emergere in questo tipo di corsi è che la matematica recente è più difficile da raccontare perché ancora piena di domande. Dai semplici laboratori precedenti emerge che nonostante il concetto di frattale sia in circolazione da più di cinquant'anni e si sia molto diffuso nel nostro immaginario, non c'è ancora una buona definizione di frattale né di geometria frattale.

Ripercorriamo questo articolo da un punto di vista superiore. Se un frattale fosse sempre quello in cui appaiono patterns non sarebbero frattali le spirali; se un frattale fosse sempre una figura autosimile non sarebbe frattale proprio l'insieme di Mandelbrot che è solo quasi-autosimile; se un frattale fosse ogni figura che ha a che fare con l'infinito potremmo rischiare di inserire la circonferenza tra questi insiemi; lo stesso dicasi se intendiamo come frattale un oggetto che riempie come figura-limite, ad esempio un cerchio. Un frattale non può essere definito come oggetto a dimensione frazionaria perché dovremmo escludere una curva di riempimento, oppure lo stesso insieme di Mandelbrot che ha dimensione 2 (insieme al suo bordo!) nel piano. All'inizio del Novecento, ben prima dell'introduzione dei frattali, si discusse molto sul concetto di dimensione. O meglio sui diversi modi di intendere la dimensione di un oggetto matematico. Vennero proposte varie risposte che sono diventate diversi concetti di dimensione e che quindi misurano l'oggetto da diversi punti di vista. Una parziale risposta al problema di definire cosa è un frattale può proprio essere questo: un frattale è un oggetto in cui diverse nozioni di dimensione danno valori diversi. Questo significa che un corso sui frattali diventa un corso sui vari concetti di dimensione. In particolare, le dimensioni topologiche, più legate al confronto tra oggetto e il suo bordo, danno valori interi, mentre dimensioni ottenute tramite teoria della misura prestano attenzione al rapporto pieno/vuoto dell'oggetto nonché al grado della sua irregolarità. Anche il più semplice frattale, l'insieme di Cantor (che si può ottenere mandando sul tappeto di Sierpinski un segmento parallelo ai lati e vedendo su questo la traccia del tappeto) ci restituisce risultati molto profondi: la zero dimensionalità topologica non coincide con la dimensione frazionaria e traduce queste due misure in numerose applicazioni, come l'alfabeto o la struttura decimale dei numeri reali. Nel caso dell'insieme di Mandelbrot alcune domande sulla dimensione sono ancora aperte nella letteratura scientifica, eppure tutto si genera da una semplice iterazione di un polinomio complesso di secondo grado.

I prerequisiti di un simile corso sarebbero una base di topologia, la teoria della misura di Lebesgue, la base dell'analisi complessa. Un programma di massima includerebbe

- **Teoria Analitica** La misura e la dimensione di Hausdoorf; La dimensione di box counting.
- **Teoria Geometrica** Piccola dimensione induttiva; Grande dimensione induttiva; Dimensione per ricoprimento; Equivalenza delle definizioni.
- **Insiemi frattali** I frattali IFS; Applicazione della teoria analitica e geometrica della dimensione agli insiemi di Cantor, alla curva di Van Koch, agli insiemi di Sierpinsky, di Menger, alla gerla di Apollonio; Curve di riempimento in particolare di Peano e Hilbert.
- **L'insieme di Mandelbrot** Gli insiemi di Julia e di Fatou; Punti speciali dell'insieme di Mandelbrot; La curva logistica.
- **Le applicazioni** Applicazioni dei frattali in varie discipline; Metodi grafici per il calcolo delle dimensioni; Metodi grafici per la rappresentazione di insiemi frattali.

Proprio come nei laboratori previsti per le scuole, una volta svelata la regola che genera il frattale, la complessità diventa manipolabile. Così dopo aver faticato per una conoscenza profonda di questi oggetti matematici si può invece cercarne facili applicazioni. Una delle mie preferite è quella urbanistica. Una città complessa è costruita come un processo a fasi successive e quindi diventa frattale: misurare questo processo usando varie dimensioni restituisce visioni diverse del suo sviluppo. Il modello più bello in tal senso è la città di Matera.

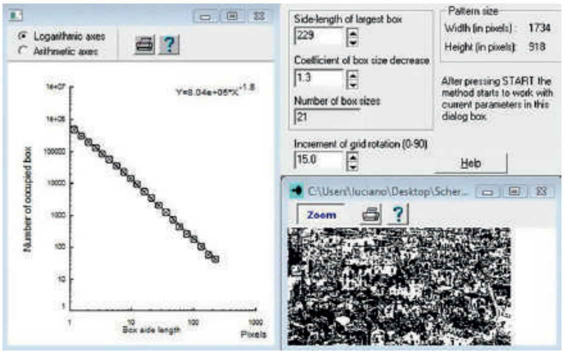


Figura **6** - Rielaborazione tramite programma Benoit di una immagine di Matera (da D.L. 2016).

CONCLUSIONE

Questo articolo, essendo frattale, non può avere una conclusione, è solo l'inizio di un processo in cui chi legge di questo argomento vuole leggerne ancora e inizia a guardare i tanti frattali attorno a sé. Ma vorrei mettere in guardia dalla tentazione di «fractal is everywhere», fenomeno che si è sicuramente verificato negli ultimi decenni dello scorso secolo. La matematica richiede definizioni anche per distinguere cosa non è frattale, e forse questo è più faticoso per noi che avendo un cervello frattale cerchiamo di codificare il resto in modo che ci somigli. Allora anche la matematica viene creata con processo frattale? Di certo passo dopo passo sviluppa curiosità e certe idee si ripetono evolvendo a scala diversa, ma se il processo converge o va all'infinito in un gioco di vuoti e pieni che avvolgono le altre discipline questo non possiamo ancora saperlo.

NOTA FINALE Tutte le immagini sono dell'autrice scattate durante laboratori ideati dall'autrice.

Sandra Lucente
Dipartimento Interateneo di Fisica,
Università degli Studi di Bari
sandra.lucente@uniba.it

Bibliografia

Castelnuovo E., Fractals: an interdisciplinary subject. *Proceedings of the 38. CIEAEM Meeting, Southampton*. 1986.
D'Alessio L., Lucente S., Matera frattale. *Proceeding of VIIth Conference Diagnosis, Conservation and Valorization of Cultural Heritage*. Aracne Editrice 2016, pp. 126-134.
Edgar G., *Measure, topology, and fractal geometry*. Springer Science & Business Media 2007.
Gleaser G., Poltier K., *Immagini della matematica*. Raffaello Cortina Editore 2013.
Lucente S., Quanto è complessa la dimensione frazionaria? http://maddmaths.simai.eu pubblicato l'11 febbraio 2018.
Lucente S., La regola del bosco: dalla comprensione all'espressione mediante curve frattali. http://www.museartiterapie.it/2017/12/13/frattali-natura-creativita-matematica/ pubblicato il 13/12/2017.
Mandelbrot B., *The fractal geometry of nature*. Freedman 1983.
Munari B., *Disegnare un albero*. Corraini 2004.
Robles K., *The Role of Fractal Fluency on Visual Perception*. PhD thesis University of Oregon 2023.