COLLANE, ORECCHINI E SCATOLETTE. COSTRUZIONE DI OGGETTI MATEMATICI CON MATERIALI DELLA VITA QUOTIDIANA

di Caterina Cozzani, Roberta Sandri, Alessandro Zaccagnini

1. DESCRIZIONE DEL PROGETTO

In questo progetto abbiamo presentato alcuni argomenti di matematica discreta a studenti provenienti da due classi del Liceo Classico «G. D. Romagnosi» di Parma. Nella prima parte abbiamo toccato l'aspetto teorico delle proprietà delle operazioni elementari definite sui numeri naturali: abbiamo visto un algoritmo per il calcolo del prodotto alternativo rispetto a quello tradizionalmente appreso nella scuola primaria e associato alla moltiplicazione sui numeri naturali un grafo di cui abbiamo studiato proprietà e applicazioni. Gli studenti hanno poi costruito alcuni oggetti: un toro con un foro, su cui disegnare senza intersezioni una porzione del grafo descritto sopra; un toro con due fori, su cui disegnare una porzione più grande; due grafi che rappresentano, in termini matematici, una porzione del semigruppo degli interi positivi generato rispettivamente da due e tre numeri primi distinti.

Nella seconda parte abbiamo introdotto i concetti di combinatoria elementare, in particolare disposizioni e permutazioni, applicandoli a «dimostrazioni senza parole» di due importanti risultati della Teoria elementare dei numeri, e cioè il Piccolo Teorema di Fermat e il Teorema di Wilson. Per illustrare concretamente queste dimostrazioni gli studenti hanno realizzato spillette e orecchini fatti di perline colorate che, opportunamente raggruppati in famiglie di cui è nota la cardinalità, rendono visibili le congruenze negli enunciati dei Teoremi.

Il filo che unisce le due parti è il fatto che si tratta di studiare le proprietà della moltiplicazione utilizzando, in un certo senso, della matematica senza formule. La chiave metodologica per trattare questi argomenti è stata quella di presentarli attraverso la costruzione di oggetti concreti che permettano di visualizzare le proprietà oggetto del nostro studio. La nostra scelta degli argomenti, che può sembrare singolare o bizzarra in un'ottica tradizionale, è stata fatta anche per evitare associazioni negative con conoscenze pregresse; come si vedrà, il nostro punto di partenza è legato a temi della matematica di base ed è quindi accessibile agli studenti che hanno partecipato al laboratorio. Oltre a costruire gli oggetti indicati qui sopra, descritti in dettaglio nel §5, gli studenti hanno realizzato una presentazione che hanno usato in varie occasioni; si veda l'elenco completo nel §7.

Per brevità il linguaggio che usiamo in questo articolo è quello tecnico della matematica: in classe abbiamo invece usato un linguaggio più semplice, anche se preciso e corretto; per esempio, abbiamo evitato tecnicismi quali la parola semigruppo e simili.

2. COSTRUZIONE DI GRAFI ASSOCIATI ALLA MOLTIPLICAZIONE

L'obiettivo di questa parte del progetto è un riesame critico delle proprietà delle operazioni, in particolare della moltiplicazione fra numeri naturali.

Il punto di partenza è stato il video [7], nel quale si descrive un algoritmo per il prodotto diverso da quello appreso nella scuola primaria, e il cui meccanismo di funzionamento è giustificato dalle proprietà associativa e distributiva di addizione e moltiplicazione. Si tratta dell'algoritmo, attribuito agli scribi egizi, basato sul successivo raddoppiamento di uno dei fattori, seguito da un dimezzamento dell'altro, nel quale si tiene traccia degli eventuali resti.

Il passo successivo è stato compiuto usando il materiale descritto nell'articolo [8] e nella conferenza [12]. È possibile associare alle operazioni elementari di addizione e moltiplicazione un grafo che ne descrive l'effetto sui numeri naturali. Mentre il grafo associato all'addizione è molto semplice, quello della moltiplicazione è molto più complesso e riflette la ricchezza dell'operazione. Il grafo permette di rivisitare in modo naturale il concetto di numero primo, di multiplo, di minimo comune multiplo, di massimo comun divisore. Si possono anche «vedere» l'unicità della fattorizzazione e la proprietà commutativa.

Mostriamo nelle figure 1 e 2 rispettivamente una porzione del grafo associato alla moltiplicazione dei numeri naturali e il semigruppo generato dai soli numeri primi 2 e 3. Ad ogni numero primo associamo un colore diverso (rosso per il numero 2, blu per il numero 3, verde per il numero 5 e nero per il numero 7 nelle nostre figure) e tracciamo un arco del colore associato al numero primo p dal numero naturale n al numero pn. Otteniamo un grafo diretto, nel quale i successori di n sono semplicemente i suoi multipli e i predecessori di n i suoi divisori. I numeri primi sono i successori immediati di 1 nella figura 1, mentre il massimo comun divisore e il minimo comune multiplo possono essere letti dalla figura 2 rispettivamente come il più grande predecessore comune ed il più piccolo successore comune. Per esempio, il massimo comun divisore di 18 e 48 è 6 perché è il numero più grande dal quale sia possibile raggiungere entrambi; analogamente 144 è il minimo comune multiplo, cioè il più piccolo intero raggiungibile da entrambi. L'unicità della scomposizione in fattori primi equivale all'affermazione che, anche se un intero può essere raggiunto a partire da 1 seguendo molti percorsi diversi, il numero totale di frecce di ciascun colore è univocamente determinato. Dunque questi grafi incorporano e permettono di visualizzare alcune delle più importanti proprietà della moltiplicazione definita sui numeri naturali.

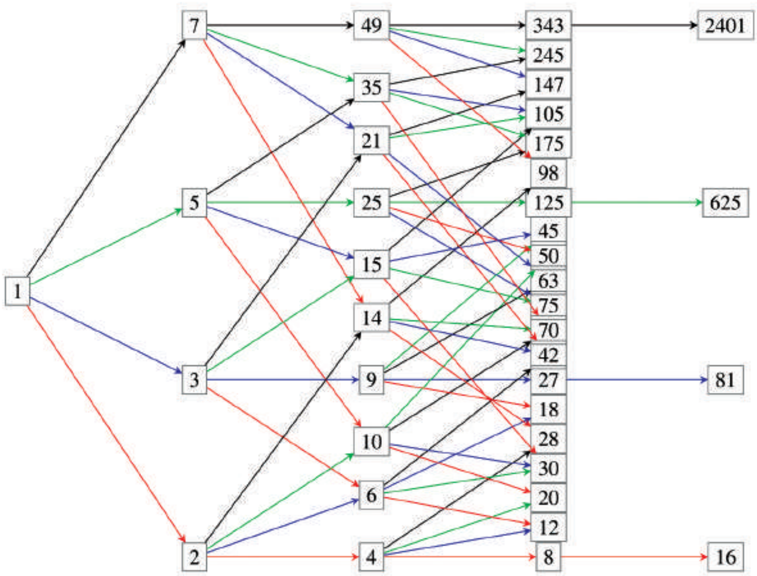

Figura **1** – Il grafo associato alla moltiplicazione sui numeri interi. Dal vertice con l'intero *n* partono frecce colorate che lo connettono all'intero 2*n* (freccia rossa), all'intero 3*n* (freccia blu), all'intero 5*n* (freccia verde), all'intero 7*n* (freccia nera). Il grafo è illimitato verso l'alto, perché esistono infiniti numeri primi, e verso destra.

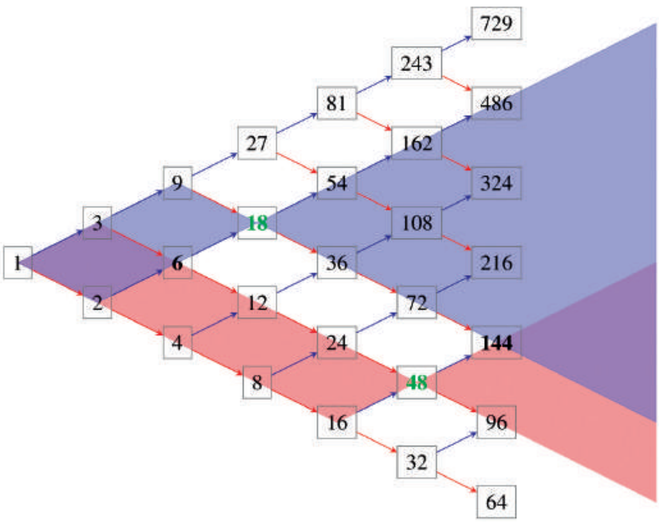

Figura **2** – Il semigruppo generato dai numeri primi 2 e 3. Massimo comun divisore e minimo comune multiplo possono essere visualizzati usando questo grafo come il più grande predecessore e il più piccolo successore comune. Indichiamo in verde gli interi 18 e 48 e in grassetto il loro massimo comun divisore 6 e minimo comune multiplo 144. Come si vede dalla figura, si tratta rispettivamente del massimo intero dal quale sia possibile raggiungere entrambi e del minimo intero raggiungibile da entrambi. Il fondo colorato indica multipli e divisori degli interi in esame.

Il grafo nella figura 1 non è planare, cioè non può essere disegnato sul piano senza intersezioni degli archi che connettono i vertici. Il grafo nella figura 2 invece può essere disegnato sul piano senza intersezioni, ma se aggiungiamo un altro numero primo siamo obbligati ad usare la terza dimensione.

Abbiamo costruito una porzione del grafo nella figura 1 mostrando che è necessario uscire dal piano per poterlo disegnare senza intersezioni: a questo riguardo, si veda la figura 3. In particolare, il grafo della figura 3 è stato disegnato su un toro, di cui abbiamo realizzato un modello concreto fatto con cartoncino e pennarelli colorati; alcune scatolette di latta, da cui il titolo di questo articolo, ci hanno fornito le strutture rigide necessarie alla costruzione. Abbiamo ragionato sul fatto che se vogliamo aggiungere anche un solo nuovo vertice, scelto opportunamente, è necessario cambiare nuovamente superficie e salire di genere topologico: si veda la figura 4. Anche di questo grafo è stato realizzato un modello concreto. Per la descrizione dettagliata degli oggetti costruiti si veda il §5.

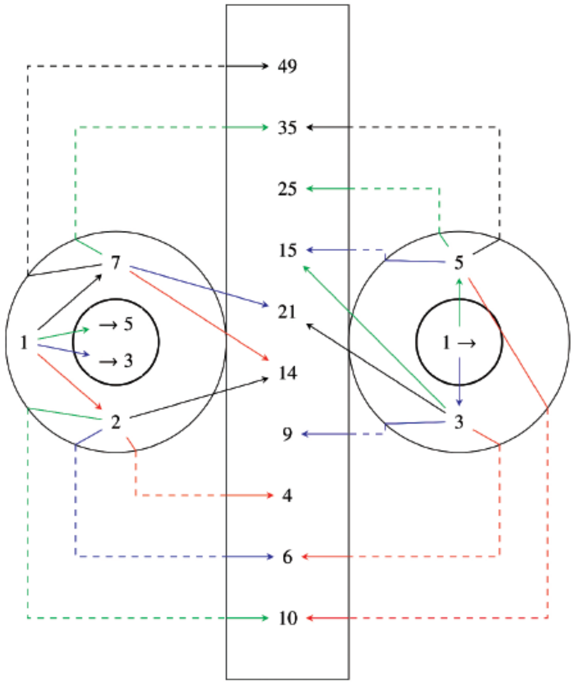

Figura **3** – Una piccola porzione del grafo nella figura 1. Per poterlo disegnare senza intersezioni è necessario usare una superficie come quella del toro, di genere positivo. Dobbiamo tracciare alcuni archi nel cilindro, qui non rappresentato, che ha come base i cerchi dal bordo ingrossato; per esempio, andiamo da 1 a 3 «entrando» nel cerchio a sinistra e «uscendo» dal cerchio a destra. La spiegazione dettagliata di questa figura e della successiva si trova nel §5.

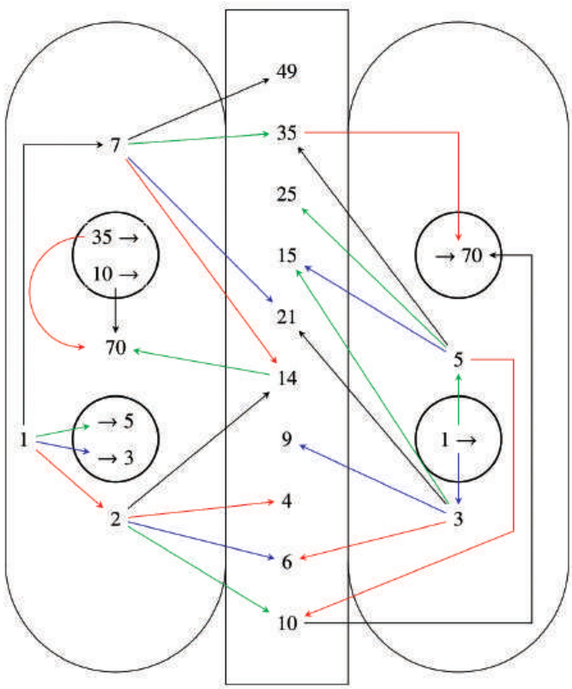

Figura **4** – Per poter aggiungere il numero 70 al grafo della figura precedente senza introdurre intersezioni è necessario usare un toro con due fori. Per le nostre regole, è sufficiente collegare 70 ai numeri 10, 14 e 35. Per fare questo, creiamo una seconda «apertura» in un punto opportuno: nel nostro disegno si può raggiungere 70 da 14 senza problemi, mentre per raggiungere 10 e 35 utilizziamo il secondo passaggio. Per motivi di spazio, nella figura 3 e in questa le strisce verticali che devono essere incollate sul lato esterno dei tori sono state drasticamente ridotte in lunghezza; si veda anche la figura 11.

A conclusione di questo lavoro abbiamo presentato agli studenti alcune applicazioni dei grafi: i grafi possono essere usati per modellizzare situazioni concrete, come per esempio una rete stradale, e allora i «fori» dei tori rappresentano gallerie e cavalcavia; la domanda è dove convenga costruirne uno. Evitare le intersezioni corrisponde a rimuovere i semafori agli incroci e a rendere più fluido il traffico. Abbiamo accennato ai problemi di ricerca sui grafi che compaiono in applicazioni quali GoogleMaps o quelle che servono a trovare gli orari dei treni. Come applicazione delle moltiplicazioni, anche iterate, abbiamo citato la crittografia moderna e la televisione ad alta definizione.

3. DIMOSTRAZIONI COMBINATORIE IN TEORIA ELEMENTARE DEI NUMERI

La seconda parte del progetto riguarda due dimostrazioni «senza parole» di due classici risultati della Teoria elementare dei numeri, il Piccolo Teorema di Fermat e quello di Wilson. Prima di tutto abbiamo parlato di calcolo combinatorio, limitandoci all'essenziale; abbiamo visto le disposizioni con ripetizione e le permutazioni, in vista delle applicazioni appena citate. Abbiamo posto alcuni problemi concreti e poi abbiamo ricavato insieme le formule generali.

Abbiamo illustrato questi teoremi mediante alcuni esempi numerici, per poi passare alla realizzazione concreta di alcuni oggetti (spillette e orecchini fatti con perline colorate) il cui conteggio fornisce le dimostrazioni richieste. L'interesse risiede nel fatto che le dimostrazioni sono sostanzialmente prive di formule e calcoli, a differenza di quello che gli studenti potrebbero aspettarsi dalla matematica. Nelle presentazioni descritte nel §7 gli studenti hanno enunciato i due teoremi in generale prima di illustrarne alcuni casi particolari per mezzo degli oggetti realizzati.

3.1. IL PICCOLO TEOREMA DI FERMAT

Il Piccolo Teorema di Fermat afferma che se p è un numero primo ed a è un intero qualsiasi allora p divide $a^p - a$. Esistono molte dimostrazioni «tradizionali» di questo risultato: qui abbiamo scelto quella combinatoria trattata nel video [9] e nell'articolo [10]. Consideriamo collane composte di esattamente p perline scelte da un insieme di a colori distinti; il numero totale di queste collane è a^p. Esattamente a collane sono monocromatiche, cioè hanno perline tutte dello stesso colore. Chiameremo policrome le collane che hanno perline di almeno due colori distinti; il loro numero è $a^p - a$. Consideriamo equivalenti due collane policrome che si ottengono una dall'altra per rotazione delle perline: la figura 5 illustra la classe di equivalenza di una collana con 7 perline. Ogni collana policroma ha una classe di equivalenza che contiene esattamente p collane perché p è un numero primo (si veda la figura 6), e quindi p divide $a^p - a$. Naturalmente, questa dimostrazione ha senso solo se a è un intero non negativo, ma la si può estendere al caso generale senza difficoltà.

3.2. IL TEOREMA DI WILSON

Il Teorema di Wilson afferma che un intero $n \geq 2$ è primo se e solo se n divide $(n-1)! - (n-1)$. Anche di questo risultato esistono dimostrazioni tradizionali, ma abbiamo preferito quella combinatoria illustrata nel video [11] e nell'articolo già citato [10].

Il fatto che la condizione sia necessaria è stato illustrato per mezzo di alcuni esempi numerici; ci siamo limitati ad aggiungere che la stessa cosa vale in generale, ma senza fornirne una dimostrazione formale. La dimostrazione combinatoria della sufficienza della condizione può essere ottenuta considerando tutti gli orecchini che si possono costruire utilizzando p perline colorate con p colori distinti secondo questa regola: la prima perlina ha un colore assegnato (nero nei nostri esempi) mentre le

Figura **5** – La classe di equivalenza di una collana policroma con p = 7 perline scelte fra a = 6 colori distinti. Dato che 7 è primo, la classe contiene esattamente 7 elementi.

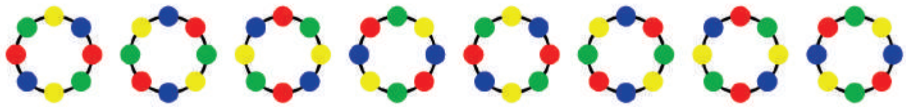

Figura **6** – Se una collana policroma ha un numero di perline composto n, la sua classe di equivalenza può avere un numero di elementi che è un divisore proprio di n; qui vediamo un caso in cui n = 8 e la classe di equivalenza della prima collana ha 4 elementi.

altre devono essere degli altri $p - 1$ colori. In totale abbiamo dunque $(p-1)!$ possibili orecchini. Si veda la figura 7 per un'illustrazione dal caso $p = 5$. Nelle nostre figure distingueremo gli orecchini veri e propri dagli «oggetti di costruzione», presenti nelle figure 8 e 9, indicando per i primi gancetto e pendenti.

L'obiettivo della dimostrazione è suddividere in classi di equivalenza gli orecchini così ottenuti, come illustrato nella figura 10. Per fare questo si sceglie arbitrariamente una permutazione ciclica dei colori (nella figura N→R→B→V→G→N). Trasformiamo un orecchino in un altro seguendo la regola illustrata nella figura 8: ogni perlina si trasforma nella seguente secondo la permutazione ciclica fissata; l'oggetto così ottenuto non è un orecchino perché non ha il nero nella prima posizione; dunque lo tagliamo in due parti che muoviamo rigidamente per portare il nero in testa. Questa trasformazione è periodica con un periodo che divide p; la didascalia della figura 9 contiene una visualizzazione della dimostrazione. Dunque il periodo vale 1 per i punti fissi e p per tutti gli altri orecchini. I punti fissi sono esattamente $p - 1$, mentre gli altri orecchini sono in classi di equivalenza ciascuna delle quali ha p elementi, a causa della periodicità della trasformazione e, di nuovo, del fatto che p è un numero primo e ha solo i divisori banali. Quindi $(p - 1)! - (p - 1)$ è divisibile per p.

I punti fissi della trasformazione corrispondono alle «progressioni aritmetiche» non banali modulo p, che sono in totale $p - 1$. Questo è il punto più difficile da spiegare; si veda la figura 9. In breve, il primo e il secondo orecchino sono diversi perché l'«intervallo» fra la prima e la seconda perlina, che vale 1, è diverso dall'intervallo tra la terza e la quarta, che vale 4 ed è uguale all'intervallo tra la prima e la seconda perlina del secondo orecchino.

Dal punto di vista formale, in entrambe le dimostrazioni sono presenti insiemi di cardinalità nota su cui abbiamo una biiezione per la quale è relativamente facile contare i punti fissi. Gli altri elementi sono divisi nelle classi di equivalenza date dalle orbite della biiezione, in modo che, sfruttando il fatto che una certa quantità è un numero primo, si ricava la condizione di divisibilità nella tesi.

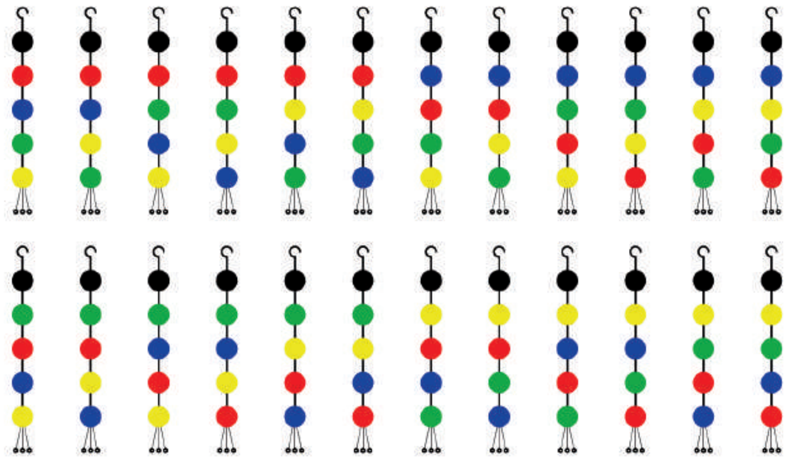

Figura **7** – Gli orecchini che si possono realizzare con 5 perline colorate sono 4! = 24.

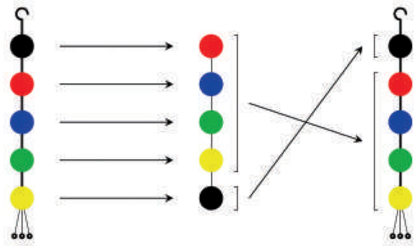

Figura **8** – La trasformazione applicata al primo orecchino riporta immediatamente all'orecchino di partenza. Una domanda difficile è trovare tutti gli orecchini con questa proprietà.

4. I GRUPPI DI LAVORO

Gli studenti si sono suddivisi autonomamente in cinque gruppi, composti di tre o quattro persone ciascuno per un totale di 17.

Il primo (I F) ha affrontato i grafi, partendo dal problema dei ponti di Königsberg (oggi Kaliningrad) risolto da Eulero nel XVIII secolo e arrivando a parlare di qualche applicazione pratica; sono stati realizzati i grafi descritti nei paragrafi 5.1, 5.2, 5.3, 5.4.

Il secondo gruppo (I F) ha studiato il calcolo combinatorio necessario a capire l'enunciato del Piccolo Teorema di Fermat; sono state realizzate le spillette descritte nel §5.5.

Il terzo gruppo (II F) ha affrontato il problema più astratto degli algoritmi per la moltiplicazione. Oltre a quello presentato nel video [7] gli studenti hanno appreso il metodo detto «persiana» o «gelosia».

Il quarto gruppo (II F) ha deciso di affrontare il problema della moltiplicazione iterata in un ambiente finito, cioè $\mathbb{Z}_n^*$, descritto in dettaglio nel §4 di [2]. In particolare è stato realizzato il grafo relativo al caso $n = 35$, descritto nel §5.7.

Il quinto gruppo (II F) ha studiato il Teorema di Wilson e ha realizzato gli orecchini descritti nel §5.6. Ci pare significativo il fatto che le studentesse di questo gruppo non erano soddisfatte della dimostrazione proposta; in particolare hanno ritenuto macchinosa la procedura di 'taglio e incollamento' illustrata nella figura 8; pertanto hanno deciso di cercare soluzioni alternative, e solo dopo vari tentativi infruttuosi hanno accettato la dimostrazione data dai docenti. La dimostrazione nella figura 9 è stata realizzata per questo documento.

5. GLI OGGETTI COSTRUITI

Gli studenti hanno realizzato gli oggetti che stiamo per descrivere in dettaglio in parte negli incontri descritti nel §7, che si sono tenuti presso il Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche dell'Università di Parma, e in parte in

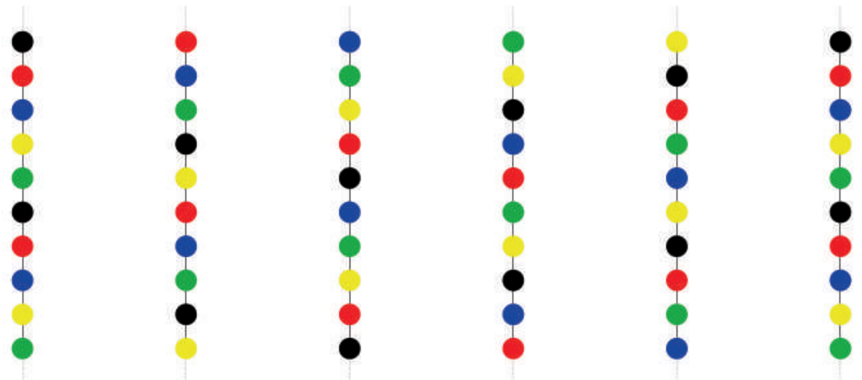

Figura **9** - Come dimostrare che la trasformazione ha periodo $p = 5$ o un suo divisore. All'estrema sinistra riportiamo in verticale due copie dell'orecchino del quale cerchiamo la classe di equivalenza. In orizzontale eseguiamo su ogni riga la trasformazione ciclica dei colori, che ha periodo 5; dunque, la colonna all'estrema destra coincide con quella all'estrema sinistra. La trasformazione illustrata nella figura 8 corrisponde a prendere come secondo elemento della classe di equivalenza l'orecchino che si trova nella seconda colonna da sinistra a partire dalla perlina nera. Allo stesso modo, il terzo orecchino della classe si trova nella terza colonna, e così via. Questa stessa figura può essere usata per spiegare perché i punti fissi sono esattamente $p - 1$: infatti, per definizione, per i punti fissi tutte le colonne devono essere uguali; questo può accadere solo se l'orecchino di partenza è uno dei $p - 1$ che si ottengono dalla sequenza fissata all'inizio prendendo tutte le perline consecutivamente, oppure una sì e una no, oppure una sì e due no, ecc. Si confronti con la parte sinistra della figura 10.

classe. In alcuni casi, a causa dell'avvicinarsi delle presentazioni in programma, sono stati costruiti oggetti più semplici di quelli previsti inizialmente, ma allo stesso modo efficaci per ottenere il risultato richiesto. Per esempio, non è stato realizzato il grafo della figura 1 e le collane proposte per dimostrare il Teorema di Fermat si sono prima trasformate in anelli e poi in spillette.

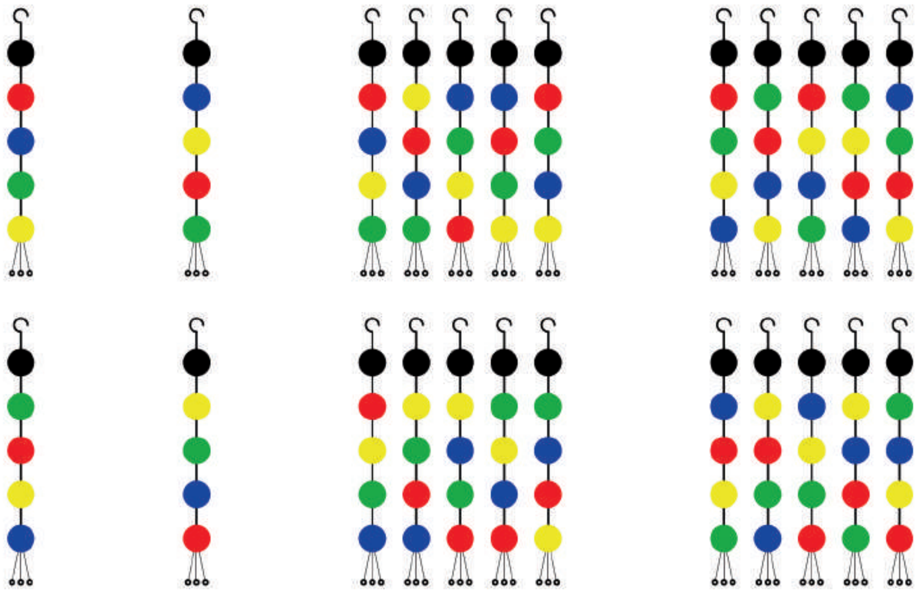

Figura **10** – Gli orecchini suddivisi in classi di equivalenza.
Il primo gruppo di 5 orecchini corrisponde alla figura 9.

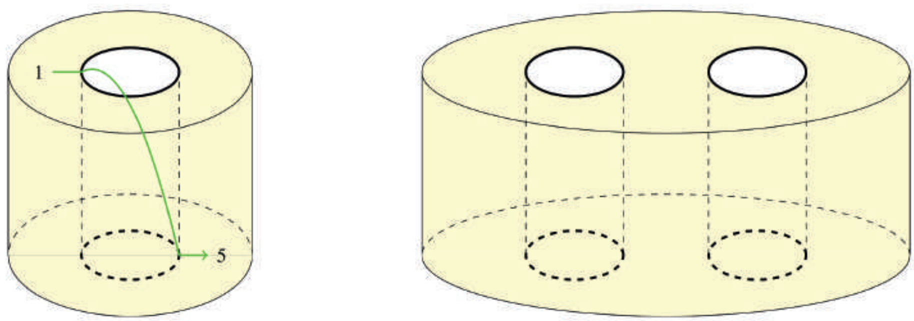

Figura **11** – I tori su cui incollare i diagrammi delle figure 3 e 4.
Nei cilindri interni si devono mettere delle striscioline di carta sulle quali sono stati disegnati gli archi colorati che «spariscono» nei cerchi con il bordo ingrossato e «compaiono» in quello corrispondente dall'altra parte: ne indichiamo uno come esempio.

5.1. IL GRAFO DELLA FIGURA 2

Sono state usate palline di polistirolo numerate con un pennarello nero che sono state incollate su un supporto di cartoncino; queste sono state collegate fra loro da stuzzicadenti colorati per indicare il numero primo corrispondente. La nostra scelta rende questo grafo più facile da realizzare e trasportare rispetto a quello descritto nel paragrafo 5.2. Per aumentare la rigidità della struttura sono stati aggiunti altri stuzzicadenti non colorati come «controventi». Per la progettazione gli studenti hanno usato GeoGebra.

5.2. VERSIONE TRIDIMENSIONALE DEL GRAFO NELLA FIGURA 2

È stato aggiunto il numero primo 5 e la «maglia» è stata estesa alla terza dimensione. Sono state usate palline di polistirolo come nell'oggetto descritto nel paragrafo 5.1, che sono state collegate con stuzzicadenti colorati per indicare il numero primo corrispondente. Anche in questo caso sono stati usati i controventi con funzione puramente di sostegno.

5.3. IL GRAFO SUL TORO NELLA FIGURA 3

I docenti hanno fornito il progetto indicato in figura. Questo deve essere fotocopiato con un ingrandimento opportuno e colorato seguendo lo schema indicato. La figura deve essere ritagliata lungo la linea continua, sia sottile che spessa, piegata e incollata su una scatola a forma di toro preparata come nella figura 11 a sinistra. Le linee tratteggiate nella figura 3 servono solo a mostrare in che modo si corrispondono i punti una volta che la figura è stata ritagliata e piegata sul toro come indicato sopra. I numeri all'interno dei cerchi con i bordi ingrossati, preceduti o seguiti dal segno →, indicano a quali nodi del grafo devono essere collegati gli archi che spariscono all'interno dei cerchi stessi. Il toro è stato realizzato rimuovendo i due coperchi di una scatoletta di tonno, per garantire una sufficiente rigidità della struttura; questa è stata poi imbottita e foderata di cartoncino. Il progetto dato è stato colorato e poi incollato sul toro ottenuto al passo precedente. È stato necessario costruire il toro in questo modo perché è praticamente impossibile incollare un foglio di carta su una superficie di curvatura diversa da 0. L'ideale sarebbe disporre di una stampante 3D per costruire questo oggetto e quello descritto qui sotto.

5.4. IL GRAFO SUL TORO DOPPIO NELLA FIGURA 4

I docenti hanno fornito il progetto in figura. Il toro doppio è stato realizzato abbinando due scatolette di tonno come nel caso appena descritto, che sono state foderate e imbottite, sia all'interno che nello spazio fra di loro, ottenendo un oggetto con l'aspetto della parte destra della figura 11. Poi il progetto, colorato come nella figura 4, è stato incollato sulla struttura ottenuta.

5.5. SPILLETTE PER IL PICCOLO TEOREMA DI FERMAT

Per motivi pratici, si è preferito realizzare spillette, invece delle collane descritte sopra, che sono state costruite usando spille da balia e perline colorate da bigiotteria; sono state disposte su un pannello di sughero, suddivisi nelle classi di equivalenza per rotazione: questo rende visibile la proprietà che si vuole dimostrare. La scelta, per ovvi motivi pratici, è caduta su $p = 3$ ed $a = 4$.

5.6. ORECCHINI PER IL TEOREMA DI WILSON

Gli orecchini sono stati realizzati con filo metallico, perline, gancetti e pendenti da bigiotteria, in due esemplari per ogni tipo. Sono stati poi disposti su due pannelli come nelle figure 7 e 10. La scelta è stata $p = 5$, anche in questo caso per motivi pratici.

5.7. I CIONDOLI CHE RAPPRESENTANO Z^*_{15} E Z^*_{35}

Questi ciondoli sono stati realizzati utilizzando filo metallico e perline colorate, come negli oggetti descritti sopra. La descrizione dettagliata di questi oggetti si trova in [2] e [3]; si tratta dei grafi associati ai gruppi moltiplicativi $\mathbb{Z}_n^*$, costruiti in due casi relativamente complicati.

6. MATERIALI DI PARTENZA E APPROFONDIMENTI

I materiali da cui partire sono già stati in gran parte preparati in due articoli e nei corrispondenti video divulgativi del terzo autore di questo documento.

(1) Operazioni elementari: [5], [7].
(2) Costruzione di grafi: [8], [12].
(3) Grafi per la moltiplicazione in un contesto finito ($\mathbb{Z}_n^*$): [2], con versione estesa [3].
(4) Dimostrazioni combinatorie: [9], [10], [11].

6.1. MATERIALE PER APPROFONDIMENTI

Estensioni di questi argomenti a contesti simili:

(1) Formalizzazione delle dimostrazioni combinatorie: [1].
(2) Dimostrazione non combinatoria del Teorema di Wilson: [6].

7. DIARIO DEGLI INCONTRI CON GLI STUDENTI E DELLE PRESENTAZIONI

Dal punto di vista metodologico, l'approccio usato nei primi incontri è stato diverso da quello degli ultimi. Come si vede nella descrizione dettagliata qui sotto, ciascuno dei primi due incontri è stato suddiviso in una parte di presentazione più formale seguita dalla realizzazione concreta degli oggetti descritti nel §5. Agli studenti è stato chiesto un atto di fiducia perché le spiegazioni date nei primi incontri sono state deliberatamente incomplete, talvolta anche vaghe, per far emergere l'obiettivo finale del laboratorio con gradualità. Abbiamo dunque ripetuto le stesse cose in più incontri, con un approccio che potremmo definire per approssimazioni successive, lasciando agli studenti il tempo di riflettere su quanto avevano ascoltato.

Gli incontri dal terzo al sesto sono invece stati finalizzati alla realizzazione degli oggetti e delle presentazioni, e le spiegazioni astratte si sono limitate a qualche precisazione e alla segnalazione di qualche applicazione anche pratica delle idee esposte. Nel settimo incontro sono stati dati alcuni dettagli astratti relativi alla realizzazione degli oggetti descritti nel §5.7.

Come si vede nel dettaglio degli incontri qui sotto, gli studenti ci hanno chiesto di poter mettere a punto la loro presentazione e gli oggetti che hanno costruito in altri incontri non previsti oltre i primi quattro, nei quali abbiamo discusso dettagliatamente degli oggetti realizzati e del modo migliore di presentarli ad un pubblico di non matematici. Tranne l'ultimo, che ha avuto luogo presso il Liceo Romagnosi, gli incontri si sono tenuti presso il Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche dell'Università di Parma.

7.1. PRIMO INCONTRO: 31 GENNAIO 2023 (3H)

(1) Descrizione del progetto.
(2) Video sull'algoritmo della moltiplicazione per raddoppiamenti [7].
(3) Conferenza sulle operazioni elementari, come in [12].
(4) Costruzione del grafo relativo (vedi figura 3).

7.2. SECONDO INCONTRO: 28 FEBBRAIO 2023 (3H)

(1) Calcolo combinatorio (disposizioni con ripetizione).
(2) Conferenza sul Teorema di Fermat, come in [9].
(3) Costruzione degli anelli o collane poi diventati spillette per motivi pratici di velocità di realizzazione.

7.3. TERZO INCONTRO: 28 MARZO 2023 (2H)

(1) Calcolo combinatorio (permutazioni).
(2) Conferenza sul Teorema di Wilson, come in [11].

7.4. QUARTO INCONTRO: 4 APRILE 2023 (2H)

(1) Ricapitolazione.
(2) Grafo con due fori (vedi figura 4).
(3) Costruzione del modello del grafo nella figura 2.

7.5. QUINTO INCONTRO: 26 APRILE 2023 (3H)

Incontro con il primo e il quarto gruppo per la costruzione degli oggetti.

7.6. SESTO INCONTRO: 2 MAGGIO 2023 (2.5H)

Incontro con il primo, secondo, quarto e quinto gruppo per una simulazione della presentazione del loro lavoro alla «Notte del Liceo Classico» del 5 maggio 2023. Messa a punto degli oggetti.

7.7. SETTIMO INCONTRO: 19 MAGGIO 2023 (1H)

(1) Conferenza tratta dall'articolo sui grafi in contesti finiti [2].

Oltre agli oggetti descritti in dettaglio nel §5, alla fine del percorso gli studenti hanno realizzato un'unica presentazione nella quale hanno descritto le varie fasi del progetto, inquadrando storicamente gli argomenti trattati e spiegando la loro rilevanza dal punto di vista matematico. Questa presentazione è stata poi usata, con tagli leggermente diversi, nelle occasioni elencate qui di seguito. Inoltre, le diverse fasi della costruzione degli oggetti sono state documentate con una serie di fotografie. Le pagine della presentazione sono state usate per realizzare dei poster che sono stati mostrati durante la Notte dei Ricercatori.

(1) Notte del Liceo Classico (5 maggio 2023).
(2) Giornata dei Laboratori del Piano Nazionale Lauree Scientifiche (23 maggio 2023).
(3) Incontro con studenti delle Scuole Secondarie di Primo grado (22 maggio 2023, 2h): primo e secondo gruppo.
(4) Incontro con studenti delle Scuole Secondarie di Primo grado (24 maggio 2023, 2h): terzo e quinto gruppo.
(5) Incontro con studenti delle Scuole Secondarie di Primo grado (29 maggio 2023, 2h): quarto gruppo.
(6) Notte dei Ricercatori (29 settembre 2023).

Il primo incontro è avvenuto presso il Liceo «Romagnosi»; il secondo e l'ultimo presso il Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche dell'Università di Parma; gli altri presso l'Istituto Comprensivo «Parma centro».

8. CONCLUSIONI

A conclusione di questo lavoro, vogliamo sottolineare alcune cose che hanno funzionato bene e altre che viceversa hanno funzionato fino ad un certo punto. Abbiamo sottoposto agli studenti un questionario, che non riportiamo in dettaglio per motivi di spazio, relativo al gradimento e alle difficoltà incontrate nel laboratorio. Il questionario è stato somministrato in forma anonima, ma gli studenti hanno deciso di firmare le loro risposte. Questionario e laboratorio non sono stati oggetto di valutazione.

Dalle risposte emerge il fatto che i ragazzi hanno apprezzato molto il laboratorio per la sua originalità rispetto alle modalità e ai programmi scolastici a cui sono abituati. Per esempio, uno studente ha sottolineato come in una situazione di tempo libero gli era capitato di pensare alla realtà usando alcuni modelli appresi nel laboratorio.

La prima cosa che ha funzionato bene è il fatto di aver proposto temi che hanno bisogno di modesti prerequisiti iniziali. Un'altra cosa che ha funzionato è l'aver proposto questa attività prevalentemente in ambiente non scolastico, con docenti diversi da quelli della classe; l'attività è stata liberamente scelta dagli studenti, è stata svolta in un contesto più rilassante e senza una valutazione finale. Gli studenti hanno apprezzato la scelta di temi tutto sommato elementari, sviluppati con un'ottica «nuova» e «diversa», per usare le loro parole. I concetti teorici sono stati tradotti in modelli visivi e concreti, e sono state evidenziate tante applicazioni alla realtà.

Per quanto riguarda una criticità di questa esperienza, segnaliamo il fatto che abbiamo avuto studenti di classe terza e quarta. Gli studenti più grandi, quelli del quarto anno, sono stati molto più autonomi e sicuri di sé nella fase di rielaborazione personale, mentre quelli del terzo anno hanno fatto decisamente più fatica a seguire le nostre spiegazioni. Sarebbe stato meglio avere solo studenti della quarta classe per avere un gruppo più omogeneo nello stile di lavoro. Abbiamo anche osservato che durante il lavoro di gruppo non ci sono mai stati scambi fra le due classi. Avendo proposto molti argomenti e molte strade, ogni gruppo ha avuto consapevolezza solo del proprio percorso e dell'oggetto realizzato, e nel momento della riflessione finale.

Abbiamo osservato, concordemente con i risultati della recente ricerca in didattica, che alla maggior parte di questi studenti non è chiara la struttura logica di un teorema (ipotesi, tesi, dimostrazione), un fatto che è emerso in tutta la sua evidenza soprattutto dal questionario che abbiamo somministrato, ma che in realtà avevamo già notato. I risultati del questionario confermano la complessità da un punto di vista educativo dei processi coinvolti nell'apprendimento delle dimostrazioni matematiche e della loro struttura logica, e che il laboratorio pur lavorando esplicitamente su alcune dimostrazioni non ha risolto la complessità del problema. Per questo ben noto problema rimandiamo per esempio a [4]. In future riproposizioni del percorso ci sembra opportuno lavorare preliminarmente o parallelamente su aspetti legati alla dimostrazione.

Ci teniamo a sottolineare il fatto che hanno aderito al progetto anche studenti che hanno valutazioni in matematica piuttosto modeste, perché non solo non sono stati valutati ma non si sono mai sentiti giudicati e hanno potuto esprimere liberamente ed autonomamente le proprie scelte.

Riportiamo qualche brevissimo estratto dalle risposte che abbiamo ricevuto. «Sicuramente ho capito che matematica non vuol dire solamente risolvere equazioni o problemi, ma che significa addentrarsi in questioni ben più ampie e spesso più collegate alla dimensione reale di quanto ci immaginiamo». «Credo che la mia idea [della matematica] sia stata ampliata, più che modificata. Studiare argomenti che non fanno parte del programma è stato molto interessante e applicare la matematica alla realtà mi ha dimostrato che questa può essere anche divertente, non solo teoria e esercizi da studiare sul banco di scuola».

Un altro aspetto che riteniamo interessante sottolineare riguarda l'intervento di questi ragazzi nella Scuola Secondaria di Primo Grado: hanno deciso di portare i loro giochi personali (Shanghai, mattoncini lego, ...) per illustrare meglio i concetti che dovevano spiegare. Hanno anche indicato la necessità di «andare piano» nelle spiegazioni, «facendo più attenzione al ritmo e al lessico». Dalle risposte emerge l'idea che i ragazzi si sono sentiti responsabilizzati nell'interazione con ragazzi più giovani, cosa che non hanno segnalato nelle spiegazioni date a coetanei o agli adulti.

Al termine di questa esperienza, tirando le somme, possiamo certamente dire che gli argomenti trattati sono stati molto numerosi, pur rimanendo nell'ambito delle proprietà della moltiplicazione. Il progetto iniziale era certamente ambizioso, e possiamo dire che sia stato realizzato in maniera molto soddisfacente dal nostro punto di vista, tanto è vero che, come indicato sopra, ci è stato chiesto di suggerire un ulteriore oggetto non previsto nella nostra formulazione di partenza, e cioè quello realizzato dal quarto gruppo, descritto nel §5.7. Complessivamente, riteniamo che la visualizzazione e creazione degli oggetti siano state un valore aggiunto alla trattazione formale degli argomenti. Come abbiamo appena detto, nella suddivisione dei compiti da parte dei singoli gruppi, l'unico che non aveva un «oggetto» che descrivesse il proprio percorso ha deciso di approfondire ulteriormente gli argomenti trattati in una direzione diversa, per arrivare poi alla creazione degli oggetti citati.

Ringraziamenti. Ringraziamo tutti gli studenti che hanno partecipato a questo laboratorio per l'entusiasmo con cui hanno affrontato i problemi proposti. Ringraziamo i colleghi Laura Branchetti e Alessandro Gambini per i consigli che ci hanno dato nella preparazione di questo documento. Ringraziamo il/la referee che ha letto e commentato con tanta attenzione una versione precedente del nostro articolo.

Caterina Cozzani

Liceo Scientifico Statale «Antonio Pacinotti», La Spezia
caterina.cozzani@gmail.com

Roberta Sandri

Liceo Artistico Statale «Paolo Toschi», Parma
roberta.sandri@liceotoschi.edu.it

Alessandro Zaccagnini

Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche,
Università degli Studi di Parma
alessandro.zaccagnini@unipr.it

Riferimenti bibliografici

[1] P. G. Anderson, A. T. Benjamin, J. A. Rouse, *Combinatorial proofs of Fermat's, Lucas's, and Wilson's theorems*, Amer. Math. Monthly 112 (2005), pp. 266-268.

[2] G. Fiorini, A. Zaccagnini, *Costruzione dei grafi di* $\mathbb{Z}_n^*$. *Un laboratorio PLS in una classe terza del Liceo Scientifico. A spasso per la Matematica — PLS 2014-2018* (A. Saracco e A. Zaccagnini, ed.), CLEUP, Padova, 2018, Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche, Università di Parma, pp. 51-73, 97-102.

[3] G. Fiorini, A. Zaccagnini, *Costruzione dei grafi di* $\mathbb{Z}_n^*$. *Un laboratorio PLS in una classe terza del Liceo Scientifico*, Dipartimento di Scienze Matematiche, Fisiche e Informatiche, Università di Parma (2018), PLS – Parma. Versione integrale. Online dal 9.10.2018. https://people.dmi.unipr.it/alessandro.zaccagnini/psfiles/papers/fz-integrale.pdf.

[4] M. A. Mariotti, *Argomentare e dimostrare come problema didattico*, UTET Università, 2022.

[5] A. Zaccagnini, *Riesame critico delle operazioni elementari. Uno sguardo matematico sulla realtà – Laboratori PLS 2010-2014* (M. Belloni e A. Zaccagnini, ed.), Dipartimento di Matematica e Informatica, Università di Parma, 2014, PLS – Parma, pp. 71-91.

[6] A. Zaccagnini, *Come riconoscere i numeri primi? Il teorema di Wilson,* 2020, Video-pillola su YouTube. https: //youtu.be/mubwg24FJzE.

[7] A. Zaccagnini, *La moltiplicazione degli scribi egizi*, 2020, Video-pillola su YouTube. https://youtu.be/sgQLI6Xpjvo.

[8] A. Zaccagnini, *Operazioni: elementari, ma non troppo!*, Sito web MaddMaths! (2020), Online dal 19.1.2020. https://maddmaths.simai.eu/divulgazione/focus/operazioni-elementari/.

[9] A. Zaccagnini, *Il piccolo Teorema di Fermat*, 2021, Video-pillola su YouTube. https://youtu.be/Zd0BG9ccAN8.

[10] A. Zaccagnini, *Collane, orecchini e . . . numeri*, Sito web MaddMaths! (2022), Online dal 16.4.2022. https: //maddmaths.simai.eu/divulgazione/collane-e-orecchini/.

[11] A. Zaccagnini, *La dimostrazione combinatoria del Teorema di Wilson*, 2022, Video-pillola su YouTube. https: //youtu.be/ctJcNeeEHpY.

[12] A. Zaccagnini, *Operazioni: elementari ma non troppo!*, 2022, Conferenza tenuta a Parma l'11.3.2022. Video su YouTube. https://youtu.be/r4jf39tYkSw.