STORIA, FORMALISMO E INSEGNAMENTO: I NUMERI NATURALI

di Francesca Gregorio, Michel Deruaz, Gianluca Basso

Quando si pensa alla matematica, uno dei primi oggetti di studio che viene in mente è il numero. Assieme a grandezza e forma, quello di numero è infatti uno dei più antichi concetti matematici, il cui sviluppo ci accompagna fin dalla preistoria, probabilmente da circa 300.000 anni (Boyer, 2009). Si tratta di una nozione che è stata centrale per lo sviluppo culturale e tecnico dell'essere umano ed è anche uno dei concetti fondamentali dell'insegnamento della matematica a scuola. Abbiamo quindi deciso di proporre ai lettori una miniserie di articoli sui diversi insiemi numerici, partendo dai numeri naturali fino ad arrivare ai complessi, offrendo un riassunto essenziale dello sviluppo storico, della formalizzazione matematica e di alcune considerazioni didattiche. In questo numero di *Archimede*, cominciamo con i numeri naturali. La parte didattica interessa principalmente la scuola dell'infanzia e i primi anni di scuola primaria.

INTRODUZIONE STORICA

Il concetto di numero naturale sembra essere davvero molto… naturale! Infatti, non è un'esclusività umana ma è condivisa con molti altri animali (Boyer, 2009; Ifrah, 1981). Per esempio, alcuni esperimenti effettuati con i corvi hanno dimostrato che questi sanno distinguere fino a quattro elementi. Anche per la nostra specie, distinguere piccole quantità sembra essere una capacità innata che non necessita un apprendimento particolare: vari studi hanno provato che anche i neonati di circa cinque mesi, prima della possibilità di avviare un qualsiasi insegnamento, hanno questa competenza (Wynn, 1992).

Storicamente, non è possibile individuare un momento preciso in cui la nozione di numero naturale è stata scoperta, ed è inverosimile anche che il merito sia di una persona o popolazione specifica (Boyer, 2009). Più probabilmente, si tratta del risultato di un processo collettivo lento e graduale. Il concetto di numero ha radici molto lontane nel tempo, probabilmente prima dell'invenzione della ruota o dell'uso dei metalli. L'idea è emersa verosimilmente dalla coscienza dell'esistenza di somiglianze e differenze tra gruppi di elementi: possedere una pecora è diverso da possedere un gregge, guardare un albero è diverso da guardare una foresta. Viceversa, una pecora e un albero hanno qualcosa in comune, ovvero il fatto di essere percepiti come un'unità. Al tempo stesso, alcuni gruppi possono essere messi in corrispondenza biunivoca: una coppia di pecore ha una caratteristica in comune con una coppia di alberi, e questa caratteristica condivisa è la proprietà astratta che chiamiamo numero (Boyer, 2009; Ifrah, 1981). La coppia, in particolare, sembra aver avuto un ruolo particolare nello sviluppo del numero. Inizialmente, infatti, l'essere umano ha differenziato tra *uno*, *due* e *molti*, mettendo nella stessa categoria tutti i gruppi composti da tre o più elementi. Una traccia di questo processo è ancora visibile in alcune lingue. Per esempio, in greco antico esisteva il duale, oltre che il singolare e il plurale come nella maggior parte delle lingue moderne.

Il concetto di numero naturale si è sviluppato anche come risposta a bisogni della vita religiosa o quotidiana degli esseri umani. Si ritiene verosimile, infatti, che l'aspetto ordinale di numero si sia sviluppato per primo, in quanto nelle cerimonie rituali c'era la necessità di chiamare i partecipanti in un ordine preciso (Boyer, 2009). Il numero si è anche accostato ad attività quali scandire il passare dei giorni, o ancora assicurarsi che tutte le pecore del proprio gregge fossero rientrate all'ovile (Ifrah, 1981). Per quest'ultima funzione, il concetto di corrispondenza biunivoca è stato fondamentale. Una tecnica classica consisteva nell'associare a ogni capo di bestiame un sassolino: al mattino, quando questi uscivano dall'ovile, il pastore metteva in una scatola un sassolino per ogni animale che attraversava il cancello; alla sera, ne toglieva uno per ogni pecora che entrava. Se alla fine della procedura la scatola era vuota e i sassolini erano stati sufficienti, significava che il gregge era al completo e che il pastore poteva dormire sonni tranquilli. Lo stesso principio è stato adottato in ambito religioso: pensiamo ad esempio alla tecnica del rosario cattolico per tenere traccia del numero di *Ave Maria* recitato. Ciò che in termini di matematica moderna chiamiamo corrispondenza biunivoca è stata dunque alla base delle prime tecniche per contare, per esempio attraverso strumenti appositi (come un bastone con un numero fisso di tacche intagliate) o attraverso la corrispondenza dell'insieme di oggetti da contare e certe parti del corpo. Per esempio, alcune popolazioni della Papua Nuova Guinea contano visualmente toccando in ordine: le dita delle mani, i polsi, il gomito destro, la spalla destra, lo sterno, ecc. arrivando in questo modo fino a 33. Una scelta di parti del corpo particolarmente comune è quella delle dita delle mani: è probabilmente per questo che la base dieci si è diffusa ed è quella tuttora utilizzata in gran parte del mondo. In un secondo momento, la corrispondenza biunivoca è stata fatta non più con parti del corpo ma con i nomi dei numeri: in italiano uno, due, tre, quattro…

FORMALIZZAZIONE MATEMATICA

Come abbiamo visto, il numero naturale è un concetto molto intuitivo per l'essere umano. Per secoli e secoli, i naturali e le loro proprietà sono stati usati senza bisogno di una rigorosa formalizzazione matematica. Un progresso in questa direzione ebbe luogo intorno alla fine del XIX secolo e l'inizio del XX, nel contesto di una generale spinta per dotare la matematica di solide fondamenta. Il matematico piemontese Giuseppe Peano propose un'assiomatizzazione dei naturali a partire dal concetto di numero successore (Peano, 1889). Secondo questa assiomatizzazione, l'insieme dei naturali è l'insieme che soddisfa i seguenti cinque assiomi:

1. $0 \in \mathbb{N}$
2. $\forall x \in \mathbb{N}, S(x) \in \mathbb{N}$
3. $\forall x, y \in \mathbb{N}, S(x) = S(y) \Rightarrow x = y$
4. $\forall x, y \in \mathbb{N}, S(x) \neq 0$
5. $\forall A \subseteq \mathbb{N}$ tale che:
    - $0 \in A$,
    - $\forall x \in A, S(x) \in A$,

    si ha $A = \mathbb{N}$

I cinque assiomi di Peano descrivono delle caratteristiche dei numeri naturali che conosciamo molto bene e che sono anche relativamente intuitive. Il primo assioma stabilisce che l'insieme dei numeri naturali non è vuoto, e ne specifica un elemento: 0. Il secondo introduce la funzione successore S: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, grazie alla quale possiamo parlare di naturale successore: il successore di un naturale è a sua volta un naturale. Questi primi due assiomi forniscono un modo per «creare» gli elementi di $\mathbb{N}$ ricorsivamente: 0 (grazie al primo assioma), il successore di 0 (ovvero 1, grazie al secondo assioma), il successore del successore di 0 (ovvero 2), e così via.

Il terzo assioma garantisce che la funzione successore è iniettiva, e impone dunque che numeri naturali diversi abbiano successori diversi. Questo assioma esclude che, partendo da 0 e iterando la funzione successore, si possa ritornare su un elemento già incontrato, e quindi rimanere incastrati in un ciclo. Per esempio, la situazione 0, $S(0) = 1$, $S(1) = 2$, $S(2) = 3$, $S(3) = 2$ non è possibile, perché per il terzo assioma, se $S(1) = 2 = S(3)$, allora $1 = 3$.

Il quarto assioma assicura che 0 non è successore di nessun naturale, escludendo la possibilità di avere un ciclo che ritorni al punto di partenza, lo 0. Il terzo e il quarto assioma garantiscono quindi che l'insieme dei numeri naturali è composto da un numero infinito di elementi.

Il quinto assioma è il principio di induzione, che impone che $\mathbb{N}$ sia il più piccolo insieme a contenere 0 e il successore di ogni suo elemento. Grazie a questo ultimo assioma, siamo sicuri che i naturali non contengano elementi al di fuori della sequenza ottenuta partendo da 0 e applicando la funzione successore. Il principio di induzione permette di dimostrare asserzioni che riguardano l'insieme dei numeri naturali.

Peano (1889) definisce l'addizione sull'insieme dei naturali come segue:

1. $\forall x \in \mathbb{N}, 0 + x = x$
2. $\forall x, y \in \mathbb{N}, S(x) + y = S(x + y)$

Il primo punto di questa definizione stabilisce che lo 0 è l'elemento neutro per la somma. Il secondo punto definisce per ricorsione l'addizione per gli altri elementi di N, a partire dalla funzione successore. Se applicati a 0, i due punti della definizione consentono di capire che la funzione successore è equivalente ad addizionare 1: $1 + y = S(0) + y = S(0 + y) = S(y)$. La somma sui naturali ha quindi un elemento neutro, 0, ma non un opposto additivo, ovvero un elemento che ci permetta di ritornare a 0: per esempio, non esiste nessun naturale b tale che $4 + b = 0$. Come vedremo nel prossimo numero di *Archimede*, è proprio questo limite dell'insieme dei naturali che darà la spinta ai matematici per definire l'insieme dei numeri interi.

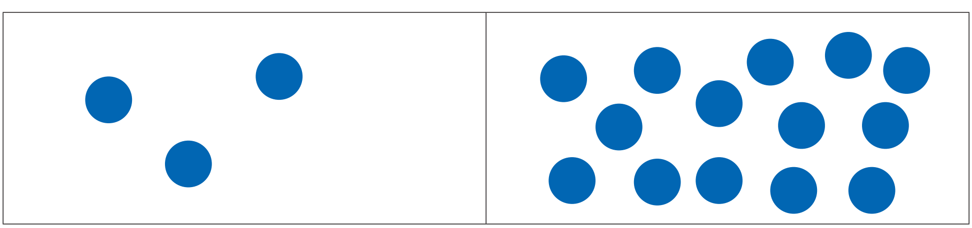
La moltiplicazione sui naturali è invece introdotta da Peano come segue:

1. $\forall x \in \mathbb{N}, 0 \cdot x = 0$
2. $\forall x, y \in \mathbb{N}, (x+1) \cdot y = x \cdot y + y$

Dalla definizione precedente, si ottiene facilmente che $1 \cdot y = y$, infatti: $1 \cdot y = (0+1) \cdot y = 0 \cdot y + y = 0 + y = y$. Da questo e dal secondo punto, si ottiene che $(x+1) \cdot y = x \cdot y + y = x \cdot y + 1 \cdot y$, che è una forma elementare della più generale proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione. La distributività, come anche le altre proprietà dell'addizione e della moltiplicazione che conosciamo bene (commutatività, associatività) sono dimostrabili usando gli assiomi elencati sopra e in particolare il principio di induzione.

INSEGNAMENTO E APPRENDIMENTO DEI NUMERI NATURALI

Come abbiamo visto precedentemente, la capacità di riconoscere la numerosità di un certo insieme sembra essere innata negli esseri umani e presente sin da molto giovani. Come anche per alcuni animali, questo processo non si basa su un vero e proprio conteggio, ma semplicemente sulla nostra percezione visiva che ci permette di determinare la quantità di un certo numero di oggetti in modo immediato e simultaneo (Dehaene e Cohen, 1994). Questo processo si chiama *subitizing* (termine inglese, dal latino *subitus*, immediato) e negli esseri umani funziona fino a un massimo di generalmente quattro o cinque oggetti. Infatti, ci è possibile riconoscere con precisione con un veloce sguardo che nella figura di sinistra ci sono tre biglie, mentre non ci è possibile fare altrettanto con la figura di destra, che ne contiene quattordici.



Al di là delle quantità identificabili grazie al *subitizing*, il conteggio ci permette di trovare con precisione la cardinalità di un certo insieme. Se dettagliamo le operazioni necessarie per contare le quattordici biglie della figura precedente, è necessario (Deruaz e Clivaz, 2018):

- Scegliere un primo elemento e associarlo al numero-etichetta «uno»;
- Scegliere un secondo elemento tra i rimanenti e associarlo al numero-etichetta «due»;
- Ripetere l'operazione finché gli elementi non sono stati tutti scelti;
- Tenere a memoria il numero-etichetta associato all'ultimo elemento;
- Associare questo ultimo numero-etichetta alla numerosità dell'insieme da contare.

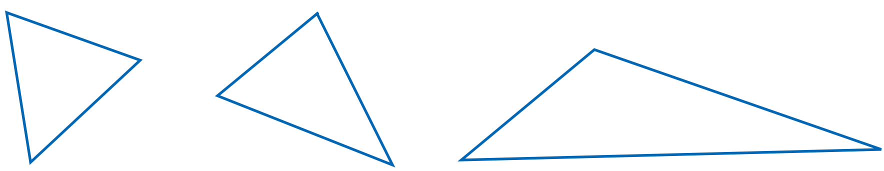
I passi appena descritti si ritrovano nei cinque principi di conteggio individuati da Gelman e Gallistel nel 1978, che descrivono ciò che deve essere compiuto e padroneggiato dai bambini nell'attività del conteggio. Questi principi offrono un'opportunità interessante per capire le difficoltà che gli allievi incontrano.

1. *Il principio di iniettività*. Come abbiamo già avuto l'occasione di discutere, la corrispondenza biunivoca è alla base di varie tecniche di conteggio. Questo principio consiste nell'appaiare ogni unità dell'insieme da contare con i nomi dei numeri, che fungono da «etichette» per gli oggetti già contati. Questo processo richiede di coordinare il gesto di conteggio con la parola: a ogni gesto corrisponde esattamente un numero-etichetta. Si può assistere a diversi tipi di errori durante questo processo, errori che sicuramente saranno ben conosciuti dagli insegnanti della scuola dell'infanzia: uno stesso oggetto viene contato più volte o non viene contato; un numero-etichetta viene saltato o ripetuto; la lista dei numeri-etichetta non è in corrispondenza con gli oggetti contati, per esempio non viene arrestata una volta contati tutti gli elementi.
2. *Il principio dell'ordine stabile*. I numeri-etichetta hanno un ordine stabile, che deve essere rispettato in tutti i contesti in cui si conta, indipendentemente dalla configurazione degli oggetti.
3. *Il principio d'irrilevanza dell'ordine*. L'ordine in cui si contano le unità non influisce sul conteggio. Questo differenzia gli oggetti da contare dai numeri-etichetta che invece hanno un ordine ben preciso. Anche se gli oggetti possono essere contati in un ordine qualsiasi, l'organizzazione spaziale di questi influisce sul conteggio, perché può rendere più o meno facile compiere degli errori.
4. *Il principio di astrazione*. Per padroneggiare il calcolo, è necessario passare all'astrazione degli oggetti contati. In particolare, per alcuni bambini è lecito raggruppare e dunque contare oggetti dello stesso tipo, per esempio della frutta. È meno intuitivo accettare che anche oggetti molto diversi, come una banana e una tigre, possano essere contati insieme. Il principio di astrazione sottolinea che anche gruppi eterogenei, o entità fisiche e astratte, possono essere contati insieme.

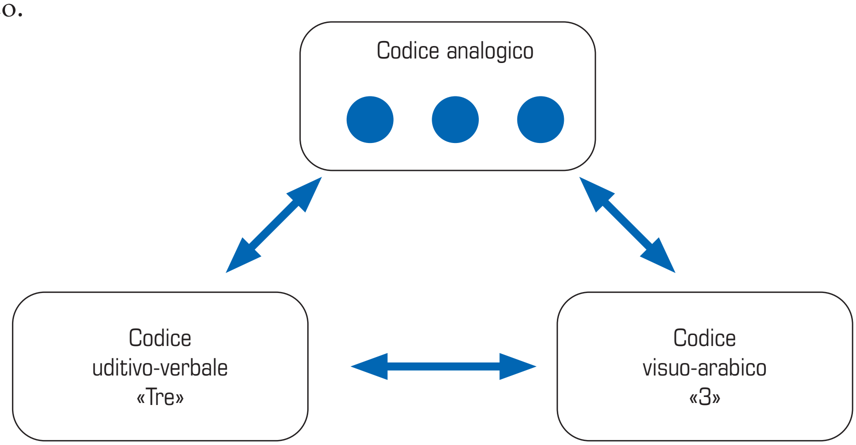
5. *Il principio cardinale*. Quando si conta un insieme di elementi, l'ultimo numero-etichetta enunciato corrisponde alla cardinalità dell'insieme. Inizialmente i bambini tendono a interpretare l'ultimo numero-etichetta come rappresentante solamente dell'ultimo elemento contato.

Come è evidente dai principi appena enunciati, quando impariamo a contare facciamo moltissime operazioni diverse, di cui una volta adulti non siamo del tutto coscienti.

Un aspetto non esplicitato dai cinque principi di Gelman e Gallistel è il cambiamento di codice necessario nel contare. Ovvero, durante il conteggio abbiamo bisogno di pronunciare i numeri, di identificarli con una parola. Questo processo ci permette di passare dall'oggetto numero, astratto, a una sua rappresentazione concreta. In matematica, infatti, gli oggetti che trattiamo sono astratti, ma per poter «fare matematica» abbiamo spesso la necessità di rappresentare quegli oggetti astratti per poterne manipolare le rappresentazioni. Si pensi alla nozione di triangolo: si tratta di un concetto geometrico, quindi astratto e, se vogliamo, ideale, al quale abbiamo accesso attraverso le rappresentazioni di alcune sue istanze, come le seguenti:



Secondo Dahaene e Cohen (1992), nella nostra cultura rappresentiamo i numeri in tre diversi codici: il codice analogico, il codice uditivo-verbale e il codice visuo-arabico.



Il codice analogico, in cui le unità sono rappresentate in maniera figurale, come per esempio nello schema qua sopra, è quello che più si avvicina agli elementi che di solito gli allievi devono contare durante l'apprendimento del conteggio. È anche la rappresentazione che ci permette di fare comparazioni approssimative o stime, o di accedere al *subitizing*. Curiosamente, accedere al codice analogico ci è molto più facile nel caso di una disposizione particolare degli oggetti. Pensiamo alla faccia del dado da sei: riconoscere il sei in questa posizione standard ci è decisamente più immediato che nel caso in cui i punti siano messi in ordine sparso.

Il codice uditivo-verbale (il nome del numero) è composto da parole che possono essere pronunciate o scritte. È un codice molto usato a scuola, non solo nel conteggio ma anche per le tabelline, per esempio. Una difficoltà del codice uditivo-verbale riguarda i problemi linguistici, o l'irregolarità della lingua. Durante il conteggio, si passa quindi dal codice analogico a quello uditivo-verbale (in genere nella sua forma orale).

Un terzo codice per rappresentare i numeri è quello visuo-arabico che rappresenta i numeri come stringhe di cifre. Questo codice non è necessario per la procedura di conteggio, almeno inizialmente, e nell'apprendimento arriva dopo gli altri due. Il codice visuo-arabico è anche molto usato a scuola essendo particolarmente adatto alla soluzione di calcoli complessi. Una difficoltà di questo codice risiede nell'aspetto posizionale dell'attuale sistema di numerazione: nel numero «22», il «2» delle decine non ha lo stesso valore del «2» delle unità.

Ogni codice ha dunque un insieme di attività per cui è «specializzato» e in quanto fruitori dei numeri abbiamo bisogno di passare da un codice all'altro, processo che può causare alcune difficoltà, anche perché le regole che regnano nei vari registri possono differire. Inoltre, gestire la presenza simultanea di tre codici può risultare complesso, perché questi operano in modo indipendente ma sono strettamente correlati.

Per accompagnare i bambini nel processo di apprendimento, i ricercatori in didattica della matematica hanno fatto molte proposte. Per esempio, il sito legato al progetto *Per contare*, portato avanti dai ricercatori Baccaglini-Frank, Bartolini e Stella, propone varie attività per avvicinare i bambini al numero e al conteggio. L'attività *Palline sullo scivolo* prevede di far rotolare delle palline su uno scivolo fino a farle arrivare in acqua e battere le mani associando il relativo numero-etichetta ogni volta che si sente il rumore della pallina che cade in acqua. Ogni tanto l'insegnante chiede quante palline sono scese. Questa attività lavora sull'aspetto ordinale e cardinale del numero, usando le sue rappresentazioni analogica e uditivo-verbale. Attraverso il ritmo e il battito delle mani, e quindi il proprio corpo, si fa esperienza diretta della corrispondenza biunivoca tra il suono e il numero-etichetta.

Un elemento che sembra essere importante è la presenza di materiale concreto che accompagni la costruzione presso l'allievo dell'astrazione del concetto di numero. Vari artefatti sono a disposizione degli insegnanti per questo obiettivo: si pensi ad esempio ai vari tipi di abachi che possono modellizzare la scrittura dei numeri in base dieci. Per esempio, è sull'abaco e sulla sua graduale astrazione che si basa il percorso didattico di Arzarello e Bartolini Bussi (Sabena *et al.*, 2019). Accompagnare l'astrazione a partire da artefatti concreti e da situazioni che abbiano senso per gli allievi permette di favorire un apprendimento stabile e duraturo.

CONCLUSIONI

I numeri naturali sono stati in primo luogo uno strumento per descrivere il reale, e sono diventati man mano oggetti matematici formalizzati. Per accedere a questi oggetti astratti, usiamo vari tipi di rappresentazioni, in particolare dobbiamo pronunciarli o scriverli, e la differenziazione tra l'oggetto numero e la sua rappresentazione non è sempre facile per gli allievi. Per saper contare è necessario padroneggiare cinque principi, ognuno dei quali può essere fonte di difficoltà nel processo di apprendimento. Riuscire a riconoscere quale/i aspetti non sono stati interiorizzati dal discente è il punto di partenza per proporre delle attività per rimediare. Più in generale, per aiutare i bambini a costruire il concetto di numero naturale, è utile favorire la creazione della comprensione del senso. Questo può avvenire attraverso la problematizzazione di situazioni a cui i discenti possano dare un significato. Anche l'uso di artefatti concreti può supportare la creazione di senso permettendo così la successiva astrazione.

Nel prossimo numero di *Archimede*… i numeri interi!

Francesca Gregorio
HEP Vaud, Losanna, Svizzera
francesca.gregorio@hepl.ch
Michel Deruaz
HEP Vaud, Losanna, Svizzera
michel.deruaz@hepl.ch
Gianluca Basso
Università degli Studi di Torino
gianluca.basso@unito.it

Bibliografia

Boyer, C. B. (2009). *Storia della matematica* (A. Carugo, Trad.). Mondadori Editore S.p.A.
Deruaz, M., Clivaz, S. (2018). *Des mathématiques pour enseigner à l'école primaire*. Presses polytechniques et universitaires romandes.
Dehaene, S., Cohen, L. (1994). Dissociable mechanisms of subitizing and counting: Neuropsychological evidence from simultagnosic patients. *Journal of experimental psychology: Human perception and performance, 20(5)*, 958-975.
Dehaene, S., Cohen, L. (1995). Towards an anatomical and functional model of number processing. *Mathematical cognition, 1,* 83-120.
Gelman, G., Gallistel, C. R. (1978). *The child understanding of number*. Harvard University Press.
Ifrah, G. (1981). *Histoire universelle des chiffres*. Éditions Seghers.
Peano, G. (1889). *Arithmetices principia: Nova methodo exposita*. Fratres Bocca.
Per Contare (2023, 12 ottobre). *Contare giocando*. https://www.percontare.it/guide/percorsi-classe-prima/prime-attivita-di-classe/contare-giocando.
Sabena, C., Ferri, F., Martignone, F., & Robotti, E. (2019). *Insegnare e apprendere matematica nella scuola dell'infanzia e primaria*. Mondadori università.
Wynn, K. (1992). Addition and subtraction by human infants. *Nature, 358*, 749-750.