

PROBLEMI TRA UOMINI CHE HANNO DENARI

(*Fibonacci, Liber abaci, cap. XII*)

di Laura Catastini e Franco Ghione

In questo lavoro prendiamo in esame un problema lungamente trattato nel capitolo XII del *Liber abaci* di Leonardo Pisano, più noto come Fibonacci ⁽¹⁾, che mette in luce aspetti meno noti del lavoro del grande matematico pisano. Si tratta di un problema apparentemente «concreto» ma, nello stesso tempo, irrealistico, di nessuna utilità pratica, dove compare, per la prima volta nel mondo latino e cristiano, la «regola retta» degli arabi, con la quale si possono risolvere «*infiniti problemi*» ⁽²⁾. Si tratta dei primi passi dell'Algebra e dei suoi metodi di pensiero nel mondo latino che pensiamo possano essere di interesse per quegli insegnanti e cultori che amano andare alle fonti originali di ciò che si insegna. La lingua latina, che veicola, nella sua chiarezza sintattica, i passaggi matematici, rende possibile una efficace collaborazione interdisciplinare spesso invocata in una moderna didattica delle scienze.

Ecco il problema «*di uomini che hanno denari*», presentato più volte da Fibonacci con diverse variazioni e ripreso poi dalla tradizione abacista successiva fino a Tartaglia:

Due uomini hanno denari e il primo disse all'altro:

- Se tu mi dessi 7 dei tuoi denari, avrei 5 volte quello che ti resta.

L'altro rispose:

- E se tu mi dessi 5 dei tuoi denari avrei 7 volte quello che resta a te.

Si chiede quanto aveva ciascuno di essi.

Si tratta ovviamente di un problema surreale, nel senso che i due uomini, per formulare le loro domande, devono già conoscere la soluzione del problema. Sarà invece il lettore quello che la dovrà trovare, sfruttando così il ruolo, crediamo insostituibile, che la Matematica ha nel formare un pensiero agile, veloce, analitico, intuitivo, razionale e, con un termine in uso qualche decennio fa, diagonale.

Ed è questo, ci pare, il vero scopo che ha Fibonacci nel trattare il problema da cui siamo partiti. Ciò può suonare fuori luogo – ma speriamo possa incuriosire il lettore – se pensiamo che il monumentale *Liber abaci* di Fibonacci è considerato

⁽¹⁾ I testi latini in nota e la loro numerazione sono ricavati dall'edizione critica di Enrico Giusti recentemente edita da Olschki: E. Giusti, P. d'Alessandro, Leonardi Bigolli Pisani, vulgo Fibonacci, *Liber Abbaci*. La traduzione è nostra.

⁽²⁾ *De eodem secundum regulam recta.*

In solvendis itaque questionibus est regula quedam, que recta dicitur, qua Arabes utuntur, est illius regule modus valde laudabilis, cum per ipsam infinite questiones solvi valeant (Cap. XII, 198, pg. 324).

generalmente dagli storici e dall'opinione comune un'opera di poco conto, sostanzialmente rivolta ai mercanti, ai loro problemi pratici, importante solo per aver introdotto le cifre indo-arabe, la scrittura posizionale e lo zero, novità presenti nelle prime pagine dell'opera. Ci possiamo accorgere del fatto che le cose non stiano così se abbiamo il coraggio di addentrarci nei capitoli successivi, cosa piuttosto faticosa per chi non è uno studioso di storia della matematica, anche perché il testo è scritto in latino e, ad oggi, non ne esiste una traduzione italiana completa. Il Progetto Fibonacci (www.progettofibonacci.it), che abbiamo avviato insieme a latinisti, informatici e insegnanti che offrono volontariamente il loro lavoro, ha proprio l'obiettivo di rendere fruibile questo testo non solo attraverso la traduzione italiana, con l'originale latino a fronte, ma anche con un apparato di schede di approfondimento e di esperienze dirette nelle scuole. Addentrando ci nella lettura ci accorgiamo presto che la grande novità, che modifica radicalmente tutto il paesaggio matematico, non è tanto il nuovo modo di scrivere i vecchi numeri interi, ma è l'introduzione di nuovi numeri, i numeri rotti (frazioni proprie dell'unità) e i numeri misti, ottenuti sommando un intero con un roto. È particolare vedere che la scrittura di Fibonacci è ancora oggi insegnata e in uso nei paesi di tradizione anglosassone:



Nasce così una nuova e semplice aritmetica che permette di eseguire sempre e comunque (se il divisore non è zero) la divisione esatta tra due numeri interi, rotti o misti. Oltre a questo viene modificata radicalmente l'idea di rapporto euclideo, possibile solo tra grandezze omogenee, e permette di introdurre nuove grandezze, che i fisici chiamano grandezze derivate, ottenute mettendo in rapporto spazi con tempi (velocità), pesi con volumi (peso specifico), prezzi con merci (costo) o anche lire con tempo lavorativo (salario) e di operare con esse con le stesse regole della vecchia aritmetica estese ai nuovi numeri. In questo articolo, per avvicinare il lettore al pensiero di Fibonacci, utilizzeremo la scrittura mista delle frazioni improprie.

Il boom economico che caratterizza il XII e il XIII secolo a Pisa, rendendo possibili commerci su grande scala, ha la sua origine in tutto questo e insieme alle scuole d'abaco nasce in quegli anni una nuova professione: quella del Maestro d'abaco, un matematico attento contemporaneamente alla didattica e alla ricerca, alla matematica applicata e a quella teorica. Tra gli appartenenti a questa categoria ricordiamo Piero della Francesca e Tartaglia. Pensiamo che sia molto utile accostarsi all'opera del primo Maestro d'abaco, Leonardo Pisano, e cercare di capirne il progetto. Il suo nuovo campo numerico, che oggi chiamiamo il campo dei numeri razionali, permette, potendo eseguire le divisioni senza resto e in modo non approssimato, di risolvere tantissimi problemi pratici che Fibonacci di certo non trascura, ma anche di aprire il pensiero verso nuovi orizzonti matematici. Insieme alle mille e una meraviglie che la matematica araba aveva prodotto, fin da secoli addietro, e che Fibonacci aveva potuto apprendere, prende forma in lingua latina, per la prima volta in modo compiuto, l'Ars Magna, come dirà Cardano, in una parola: l'Algebra. Il connubio tra numeri razionali e algebra spalanca la porta su un nuovo immenso campo di ricerche matematiche e Fibonacci ne è entusiasticamente consapevole. Si tratta intanto di capire quali problemi si possano risolvere con questi nuovi strumenti e quali nuovi ne nascano, in un processo di astrazione, generalizzazione progressiva e crescita delle difficoltà. Due terzi del *Liber abaci* è dedicato alla ricerca di metodi matematici, di strategie di pensiero, di algoritmi per risolvere problemi matematici teorici e il Maestro si qualifica come colui che è capace, coi nuovi strumenti, di inquadrare e risolvere questioni pratiche, e che è anche in grado di elaborare nuove strategie, di inventare metodi inediti a fronte di problemi essi stessi inediti e da inventare, affinché siano in un qualche modo emblematici. Problemi questa volta totalmente inutili sul piano pratico, ma fortemente significativi per esplorare il nuovo e sconosciuto mondo che la matematica araba aveva aperto, per trovare vie e percorsi praticabili, per identificare nuovi oggetti matematici. Non dobbiamo stupirci che all'apparenza tali problemi ci sembrino pratici, perché i soggetti sono di fatto concreti e parlano di denari, ma dobbiamo pensare che il linguaggio formale letterale, che è proprio quello che l'Algebra andrà formando, non era ancora compiuto ed era proprio ciò che doveva formarsi. Il riferirsi a oggetti concreti invece che ad astratte « x » e « y » permetteva, come vedremo, di entrare con naturalezza nel mondo dell'Algebra e dei suoi metodi. Per questo alcuni problemi in Fibonacci sono surreali: i loro personaggi sono oggetti numerici concreti ma il contesto reale nel quale si pongono è astratto, paradossale. Un problema surreale assomiglia a un quadro di Magritte. Dirà il grande pittore:

Tutto nelle mie opere nasce dal sentimento e dalla consapevolezza che noi apparteniamo a un universo enigmatico.

Anche in Fibonacci ciò che interessa nei problemi di uomini che hanno denari, o in quelli successivi di uomini che trovano borse o che vogliono comprare un

cavallo senza averne i denari, non è certo la soluzione numerica del problema, ma piuttosto il suo aspetto enigmatico e il modo in cui il pensiero si deve porre per sciogliere l'enigma. Lo scopo è evidentemente quello di formare un pensiero matematico, un pensiero critico, capace di orientarsi, di non arrendersi, di trovare possibili vie, e anche di inventare nuovi problemi coi quali sfidare altri matematici. Trovare la soluzione è cosa importante ma del tutto secondaria e comunque, in generale, senza alcuna utilità pratica. Per questo Fibonacci propone per questo problema, come vedremo, diverse soluzioni, diverse strade, esercitazioni al pensiero algebrico, tutte capaci di arrivare alla fine della matassa.

CON LA MENTE E CON GLI OCCHI

Tornando al nostro enigma, sappiamo da Fibonacci che il problema è stato proposto da un Maestro di Costantinopoli, cosa questa che, al di là di tutto, diventa immediatamente, per il matematico pisano, una sfida. Il Maestro di Costantinopoli, con i suoi enigmi, appare spesso nel *Liber abaci* e già questo attribuisce al problema un valore aggiunto e al Maestro, come sarà nelle sfide matematiche dei secoli successivi, una superiore dignità.

Ma veniamo a come Fibonacci argomenta: l'idea di partenza è quella di cercare di ricondurre il problema a due incognite a un nuovo problema con una sola incognita che, ci auguriamo, sia più facile da risolvere. Lo strumento iniziale per fare questo è figlio di una lunga pratica con l'aritmetica dei numeri rotti. Scritto con i nostri simboli Fibonacci si serve ripetutamente delle seguenti relazioni:

$$\text{Se } A = nB \text{ allora } A = \frac{n}{n+1}(A+B) \text{ e } B = \frac{1}{n+1}(A+B)$$

Ora, per renderci precisamente conto del modo di pensare e di scrivere del matematico pisano, riprendiamo il problema iniziale e, come fa lui, usiamo le parole per esprimere i suoi ragionamenti.

Il primo uomo dice al secondo uomo:

- Se tu mi dessi 7 dei tuoi denari, avrei 5 volte quello che ti resta.

Dunque i denari del primo uomo più 7 denari sono il quintuplo dei denari che restano al secondo uomo. Utilizziamo ora la relazione $B = \frac{1}{n+1}(A+B)$ nella quale B rappresenta i denari che restano al secondo uomo, A i denari del primo uomo più i 7 denari ricevuti, e n è uguale a 5. Possiamo allora affermare che i denari che restano al secondo uomo sono 1/6 della somma dei denari del primo uomo più 7 denari, più i denari che restano al secondo uomo. Ma i denari che restano al secondo uomo sono i suoi denari meno 7, che aggiunti ai denari del primo uomo

più 7 danno la somma dei denari posseduti dai due uomini. Scriviamo il risultato di questo ragionamento:

I denari del secondo uomo meno 7 denari sono $1/6$ della *somma* dei denari di entrambi gli uomini.

Usando la stessa relazione per la seconda affermazione, poiché i denari del secondo uomo più 5 denari sono 7 volte i denari che restano al primo uomo, i denari che restano al primo uomo sono $1/8$ della somma dei denari del secondo uomo più 5 denari, più i denari che restano al primo uomo; poiché i denari che restano al primo uomo sono i suoi denari meno 5, questa somma è uguale alla somma dei denari di entrambi gli uomini. Scriviamo il risultato:

I denari del primo uomo meno 5 denari sono $1/8$ della *somma* dei denari di entrambi gli uomini.

Dunque uno ha $1/6$ di tutta la *somma* e l'altro $1/8$ della stessa, dopo che hanno ceduto i denari richiesti. Sommando troviamo che tutta la *somma* meno 12 denari è tanto quanto $1/8$ di tutta la *somma* più $1/6$ di tutta la *somma*, ma $1/6$ più $1/8$ fa $14/48 = 7/24$. In definitiva: tutta la *somma* meno 12 denari è tanto quanto $7/24$ di tutta la *somma*, cioè:

tutta la *somma* meno i suoi $7/24$ vale 12 denari.

Abbiamo indicato in corsivo la *somma*, diventata ora la nuova incognita, che adesso possiamo calcolare con buona dimestichezza dei numeri misti. Dividiamo tutta la *somma* in 24 parti uguali in modo che $7/24$ di tutta la *somma* sia uguale a 7 di quelle parti; in questo modo tutta la *somma* meno i suoi $7/24$ è uguale a 17 di quelle parti, ma queste valgono 12 denari e, poiché sono tutte uguali, una di esse vale $12/17$ denari. Moltiplicando per 24 questa quantità troviamo che tutta la *somma* è $288/17 = 16 \frac{16}{17}$ denari e $16/17$ di un denaro che, nella scrittura in numeri misti, diventa $16 \frac{16}{17}$ ⁽³⁾.

E, in definitiva:

- i denari del primo uomo sono $1/8$ di $16 \frac{16}{17}$ più 5 denari cioè $7 \frac{2}{17}$
- i denari del secondo uomo sono $1/6$ di $16 \frac{16}{17}$ più 7 cioè $9 \frac{14}{17}$

infatti $7 + \frac{2}{17} + 7 = 14 + \frac{2}{7} = 5$ volte $2 \frac{14}{17}$ e anche $9 + \frac{14}{17} + 5 = 14 + \frac{14}{17} = 7$ volte $2 \frac{2}{17}$.

⁽³⁾ Fibonacci scrive i numeri misti alla araba indicando la parte intera a destra della frazione propria: $16/17$ 16.

Come si vede, le operazioni mentali che abbiamo eseguito sulle due quantità numeriche in gioco sono essenzialmente di natura algebrica:

$$(A - 7) + (B + 7) = A + B,$$

se $A = B$ e $C = D$ allora $A + C = B + D$

$$1/8 \text{ di } (A + B) + 1/6 \text{ di } (A + B) = 7/24 \text{ di } (A + B)$$

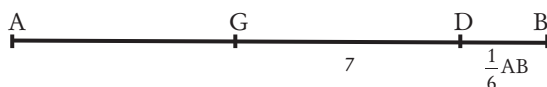
Esse sono il frutto di una lunga pratica col calcolo sui numeri misti, come spesso era nel periodo medioevale, e ora esse appaiono limpide al pensiero e vengono comprese globalmente in modo naturale senza bisogno di giustificazione formale e agilmente si muovono nel nuovo universo numerico. Saranno queste proprietà, insieme ad altre, che andranno a formare la base assiomatica dell'algebra moderna.

Ma poi, «*anche perché* [tutto ciò] *appaia più chiaro agli occhi*», Fibonacci ci fa vedere questi ragionamenti facendo appello ad altre modalità di pensiero: alla vista e alla geometria.

Rappresentiamo i denari dei due uomini con due segmenti adiacenti AG e GB e supponiamo che il segmento unitario rappresenti 1 denaro



Poiché il primo uomo chiede 7 denari al secondo uomo, ottenuti questi denari la situazione si presenta così:



$AD = AG + 7$ sono i denari che ha il primo uomo, $DB = GB - 7$ sono i denari che restano al secondo uomo. Ma il primo uomo afferma di avere 5 volte quanto resta al secondo uomo, dunque $AD = 5 DB$ e quindi

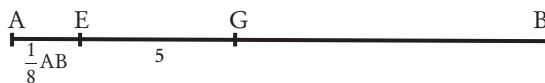
$$DB = 1/6 AB$$

Scrive Fibonacci:

Se il numero AD si divide in cinque parti uguali, ciascuna parte sarà uguale al numero DB , perciò DB è la sesta parte di tutto il numero AB cioè della somma dei denari di entrambi gli uomini⁽⁴⁾.

⁽⁴⁾ Ergo si numerus AD dividatur in quinque partes equales, erit unaqueque pars equalis numero DB ; quare DB est sexta pars totius numeri AB , scilicet de summa denariorum utriusque hominis. (Cap. XII, 194, pg. 324).

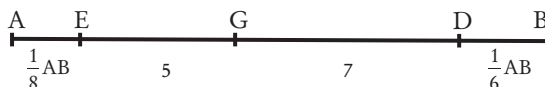
Considerando ora l'affermazione del secondo uomo, ottenuti i 5 denari dal primo uomo, la situazione è la seguente:



$BE = BG + 5$ sono i denari totali del secondo uomo, $AE = AG - 5$ sono i denari che restano al primo uomo. Ma il secondo uomo afferma di avere 7 volte quanto resta al primo uomo, dunque $BE = 7 AE$ e quindi

$$AE = 1/8 AB$$

Ora mettiamo insieme tutte le informazioni e guardiamole:



Abbiamo un segmento AB tale che, levandogli il suo ottavo e il suo sesto, cioè i suoi $7/24$, restano 12 unità, e vogliamo trovare la grandezza del segmento. Dividiamo allora AB in 24 parti uguali tra loro in modo che AE sia 3 di quelle parti e DB 4 parti. Allora $ED = 24 - 7 = 17$ parti e queste 17 parti valgono 12 denari. Dunque una parte vale $12/17$, e si possono fare gli stessi calcoli che abbiamo fatto prima.

- $AB = 288/17 = 16 \frac{16}{17}$,
- $AE = 1/8 AB = 36/17 = 2 \frac{2}{17}$
- $AG =$ i denari del primo uomo che sono $5 + 2 + 2/17 = 7 \frac{2}{17}$
- $DB = 1/6 AB = 48/17 = 2 \frac{14}{17}$
- $GB =$ i denari del secondo uomo che sono $7 + 2 + 14/17 = 9 \frac{14}{17}$.

Ma non è tanto questo risultato numerico che ci interessa quanto il cammino che abbiamo seguito o che potremmo seguire anche in altre situazioni.

Fibonacci intanto non si accontenta, ma propone un nuovo procedimento:

Per risolvere i quesiti vi è una certa regola, che si dice *recta*, della quale gli arabi fanno uso, il metodo di quella regola è assai lodevole, perché con essa possono essere risolti infiniti problemi^(?).

È con queste parole che l'Algebra appare per la prima volta nell'Europa latina e cristiana. Seguiamo passo passo come Fibonacci continua:

^(?) In solvendis itaque questionibus est regula quedam, que recta dicitur, qua Arabes utuntur, est illius regule modus valde laudabilis, cum per ipsam infinite questiones solvi valeant. (Cap. XII, 198, pg. 324).

se in questo problema vuoi seguire questa regola, poni che il secondo uomo abbia una cosa, e i 7 denari, che gli chiede il primo, e intendi per la cosa una qualche quantità ignota che vuoi trovare⁽⁶⁾

denari del secondo uomo = 1 *cosa* più 7 denari.

I denari del primo uomo, avuti i 7 denari dal secondo uomo, sono 5 volte quanto resta al secondo uomo, cioè 5 *cose*, quindi

denari del primo uomo = 5 *cose* meno 7 denari.

Poiché il secondo uomo con 5 denari del primo uomo ha 7 volte quello che resta al primo uomo

$$1 \text{ cosa} + (7 + 5) \text{ denari} = 7 (5 \text{ cose} - (7 + 5) \text{ denari}).$$

È questa la prima equazione che compare nel *Liber abaci* e nell'Europa latina e cristiana.

$$x + 12 = 7(5x - 12)$$

Tenendo conto che 12 denari sono 1 soldo, così prosegue Fibonacci:

Moltiplicate cinque cose meno 12 denari per 7, farà 35 cose meno 7 soldi che sono uguali a una cosa e un soldo.

$$35 \text{ cose} - 7 \text{ soldi} = 1 \text{ cosa} + 1 \text{ soldo}$$

perciò, se ad entrambe le parti si sommano 7 soldi, saranno 35 cose uguali ad una cosa più 8 soldi, perché se si sommano gli uguali agli uguali, i totali saranno uguali.

$$35 \text{ cose} = 1 \text{ cosa} + 8 \text{ soldi.}$$

E ancora, togliendo uguali dagli uguali, ciò che resterà saranno uguali: se dalle suddette due parti sottrai una cosa, resteranno 34 cose uguali a 8 soldi

$$34 \text{ cose} = 8 \text{ soldi,}$$

perciò se avrai diviso gli 8 soldi per 34, avrai $14/17 + 2$ [denari] come totale di ciascuna cosa⁽⁷⁾

⁽⁶⁾ Quam regulam si in hac questione imitari vis, pone secundum hominem habere rem et denarios 7 quos petit ei primus, et intellige pro re summam aliquam ignotam quam invenire vis. (Cap. XII, 198, pg. 324).

⁽⁷⁾ Quare multiplicatis quinque rebus minus denariis 12 per 7, venient 35 res minus soldis 7, que equantur uni rei et soldo uno. Quare si utrique parti addantur soldi 7, erunt triginta quinque res equales de re una et soldi 8; quia si super equalia equalia addantur, tota erunt equalia. Rursus cum de equalibus equalia dempseris, que remanebunt equalia erunt, si de utraque duarum partium tollatur res una, remanebunt 34 res equales de soldis 8; quare si diviseris soldos 8 per 34, habebis $14/17 + 2$ pro summa uniuscuiusque rei. (Cap. XII, 199-200, pg. 325).

$$1 \text{ cosa} = 48/17 \text{ denari} = 2 \frac{4}{17} \text{ denari}.$$

Dunque il primo uomo avrà 1 *cosa* più 7 denari cioè $9 + 14/17$ denari, mentre il secondo uomo avrà $5 \text{ cose} - 7 \text{ denari} = 7 + 2/17$ denari.

Da ora in poi, nel *Liber abaci*, le operazioni sui due membri di una uguaglianza (levare e aggiungere stesse quantità fino a ridursi alla forma canonica $ax = b$, risolta direttamente usando l'operazione inversa della moltiplicazione, cioè dividendo b per a) vengono applicate più volte. La differenza concettuale col procedimento precedente, che comunque non è completamente soppiantato da quello nuovo, è un salto di astrazione: mentre prima avevamo a che fare con i denari dei due uomini, cioè con oggetti numerici ben precisi e concreti, se pure incogniti, ora abbiamo a che fare con un ente più astratto, la *cosa*, con la quale operiamo come avevamo fatto con i più concreti denari dei due uomini. La *cosa* ⁽⁸⁾, *al-shai'* in arabo, è la parola che al-Khwārizmī utilizza per indicare l'incognita, ed è la stessa parola che i teologi arabi usano per indicare una caratteristica di Dio: quella di avere un'esistenza certa se pure indeterminata. La *cosa* indicherà l'incognita. Per questo la *regola retta* viene anche chiamata, nella tradizione successiva, la *regola della cosa*. Ci sembra chiaro che non vi sia grande differenza concettuale tra l'algebra parlata e l'algebra simbolica moderna, se non per la maggior lunghezza delle frasi, e per l'economia di pensiero che ne deriva, mentre ci pare un salto di astrazione ben più importante passare dall'algebra parlata alla introduzione della «*cosa*», una parola che va bene per ogni problema, una parola dunque che scavalca il significato concreto dei «denari del primo uomo» e assume il valore universale di ciò che non si conosce e che si vuol trovare. Che poi si sostituisca la grafia «*cosa*» con la grafia « x » non fa una differenza sostanziale.

VARIAZIONI SUL TEMA

Il discorso non finisce qui, ma anzi qui ricomincia. Vi sono ora delle variazioni del problema precedente, sempre con due uomini che si scambiano informazioni creando una nuova situazione surreale simile alla precedente. Nel seguito, per facilitare il lettore, seguiremo il modo moderno di scrivere le equazioni.

E ancora il primo, avuti 7 denari dal secondo, abbia il quintuplo del secondo, e in più 1 denaro. E il secondo, avuti 5 denari dal primo, abbia sette volte tanto quanto il primo e in più 1 denaro ⁽⁹⁾.

⁽⁸⁾ L. CATASTINI, F. GHIONE, R. RASHED, *Algebra. Origini e sviluppi tra mondo arabo e mondo latino*, Carocci, 2016.

⁽⁹⁾ Rursus primus, habitis 7 ex denariis secundi, habeat quinquies tantum quam secundus et insuper denarium 1. Et secundus, habitis 5 ex denariis primi, habeat septies tantum quam primus et amplius denarium 1 (Cap. XII, 204, pg. 326).

Indichiamo con x_1 i denari del primo uomo e con x_2 quelli del secondo uomo; si tratta di risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x_1 + 7 = 5(x_2 - 7) + 1 \\ x_2 + 5 = 7(x_1 - 5) + 1 \end{cases}$$

Potremmo procedere con la *regola retta*, ma Fibonacci sviluppa in modo diverso l'idea precedente. Ora abbiamo $x_1 + 6 = 5(x_2 - 7)$ e, in questo caso, $(x_1 + 6) + (x_2 - 7)$ non è la somma di tutti i denari ma una somma più piccola data da $x_1 + x_2 - 1$. Da qui l'idea di introdurre una nuova variabile, la *somma minore* $m_2 = x_1 + x_2 - 1$ che si aggiunge alla *somma maggiore* $m_1 = x_1 + x_2$ che avevamo prima.

Chiamerai maggiore la somma di tutti i denari di entrambi gli uomini; e sottratto da questo totale il denaro che si aggiunge a ciascuno, chiamerai minore il resto⁽¹⁰⁾.

Fibonacci ora esprime in due modi diversi i denari del primo uomo in termini di somma minore: la *somma minore* ha un nome con il quale possiamo operare, non importa che il nome sia «cosa» o «x».

Come abbiamo detto, da $A = nB$ ricaviamo $A = \frac{n}{n+1}(A+B)$ e quindi la prima equazione ci dice che $x_1 + 6 = \frac{5}{6}m_2$. Ma adesso, invece di seguire lo stesso processo per la seconda equazione, Fibonacci utilizza il fatto che se $A = nB$ risulta anche $B = \frac{1}{n+1}(A+B)$ e la seconda equazione del sistema ci dice che $x_1 - 5 = \frac{1}{8}m_2$. Questi due modi di calcolare x_1 danno luogo a una nuova equazione dove l'incognita è la *somma minore*.

$$\frac{5}{6}m_2 - 6 = \frac{1}{8}m_2 + 5$$

Ora Fibonacci lavora algebricamente su questa uguaglianza:

Il primo ha $5/6$ della somma minore, meno 6 denari; o $1/8$ della stessa somma più 5 denari: per cui $5/6$ della somma minore meno 6 denari sono quanto $1/8$ della stessa somma con 5 denari. Perciò se si sommano a ciascuna parte 6 denari, $5/6$ della somma minore saranno quanto $1/8$ della stessa somma più 11 denari quindi tolti $1/8$ da $5/6$ della somma minore, resta 11⁽¹¹⁾.

⁽¹⁰⁾ Summam omnium denariorum amborum hominum vocabis maiorem; de qua extracto denario qui superhabundat unicuique, residuum vocabis minorem. (Cap. XII, 204, pg. 326).

⁽¹¹⁾ ...primus habet $5/6$ minoris summe minus denariis 6, vel $1/8$ eiusdem summe et plus denariis 5, unde $5/6$ minoris summe minus denariis 6 sunt quantum $1/8$ eiusdem summe cum denariis 5. Quare si addantur unicuique portiones denarii 6, erunt $5/6$ minoris summe quantum $1/8$ eiusdem summe cum denariis 11 (Cap. XII, 212, pg. 327).

ora è facile da $\frac{17}{24}m_2 = 11$ ricavare m_2 e da questo prima x_1 e poi x_2 , i cui valori numerici, al momento hanno pochissimo interesse. Ci domandiamo: perché introdurre questo nuovo metodo quando il problema era risolvibile con i metodi precedenti? Non solo per la bellezza della nuova idea ma anche perché esso può rendere più agevole lo svolgimento nei problemi successivi. E così difatti accade in un ulteriore enigma quando i denari aggiunti non sono gli stessi nei due casi.

Di nuovo il primo chiedi al secondo 7, e abbia un denaro più il quintuplo di quello. Il secondo ne chiedi al primo 5, e abbia 2 denari più sette volte il primo⁽¹²⁾.

$$\begin{cases} x_1 + 7 = 5(x_2 - 7) + 1 \\ x_2 + 5 = 7(x_1 - 5) + 2 \end{cases}$$

In questo problema si devono considerare tre somme. La maggiore di queste è la quantità di tutti i denari dei due uomini, la media è di 1 in meno di essa; la minore è 2 in meno della somma maggiore o 1 in meno della media⁽¹³⁾.

La *somma maggiore* è la somma dei denari dei due uomini.

La *somma mediana* è la somma dei denari dei due uomini meno 1.

La *somma minore* è la somma dei denari dei due uomini meno 2.

Ora possiamo ridurre i denari del primo uomo a una qualunque di queste tre somme, trovandoci così di fronte a tre possibili strade, oppure, come anche nel caso precedente, possiamo ridurre i denari del secondo uomo a ognuna delle tre somme, in modo da avere altre tre possibili strade; Fibonacci, con pazienza, le percorre tutte e sei.

Le parti di entrambi si possono ricondurre alle parti di ciascuna delle tre dette somme. Allora per primo riduciamo quelle parti in parti della somma minore⁽¹⁴⁾.

Non ci sembra che questo problema possa considerarsi un problema di interesse pratico per i mercanti né tanto meno dilettevole, visto l'insistenza di sbrogliare la situazione in tanti modi diversi, ognuno dei quali richiede calcoli piuttosto noiosi. Crediamo invece che l'intenzione di Fibonacci sia didattica, sia cioè quella di esercitare il pensiero a manipolare le uguaglianze, scegliendo, a seconda delle esigenze, diverse quantità incognite alle quali ridurre alla fine il problema: i denari del secondo uomo meno 7 quando usa la regola della cosa, e le tre diverse somme.

⁽¹²⁾ Rursus primus querat secundo 7 et habeat 1 plus quam quinquies ipso. Secundus petat primo 5 et habeat 2 plus quam septies ipso (Cap. XII, 220, pg. 328).

⁽¹³⁾ In hac questione tres summe considerande sunt. Quarum maior est quantitas omnium denariorum ipsorum duorum hominum; media est 1 minus ea; minor quoque est 2 minus maiori summe, vel 1 minus media (Cap. XII, 220, pg. 328).

⁽¹⁴⁾ Quibus omnibus peractis, possunt redigi portiones utriusque in partes unius cuiuslibet trium dictarum summarum. Redigamus ergo eas primum in partes minoris summe (Cap. XII, 222, pg. 328).

Questa duttilità di pensiero si rende ancor più necessaria se capita di incontrare l'impossibile.

Vi siano di nuovo due uomini, e il primo chieda al secondo 7 e abbia similmente il quintuplo di esso e uno in più. Il secondo pure chieda 5 al primo; e abbia sette volte tanto di esso, e 15 in più⁽¹⁵⁾.

$$\begin{cases} x_1 + 7 = 5(x_2 - 7) + 1 \\ x_2 + 5 = 7(x_1 - 5) + 15 \end{cases}$$

Come nel caso precedente consideriamo la somma mediana data $m_2 = x_1 + x_2 - 1$ e la somma minore $m_3 = x_1 + x_2 - 15$. Ragionando come prima troviamo $x_1 - 5 = \frac{1}{8}m_3$ e $x_2 - 7 = \frac{1}{6}m_2$ ma $m_2 = m_3 + 14$ e dunque $\frac{1}{6}m_2 = \frac{1}{6}m_3 + 2\frac{1}{3}$ quindi $x_2 = \frac{1}{6}m_3 + 9\frac{1}{3}$, che sommati a x_1 , essendo $x_1 + x_2 = m_3 + 15$, forniscono l'equazione nell'incognita m_3

$$m_3 + 15 = \frac{7}{24}m_3 + 14\frac{1}{3}$$

Se da entrambe le parti si sottraggono $\frac{1}{3} 14$ denari, resterà la somma minore con $\frac{2}{3}$ di un denaro, uguale a $\frac{1}{8} + \frac{1}{6}$ della somma stessa, cosa che è impossibile⁽¹⁶⁾.

Ciò è sicuramente impossibile se supponiamo che questa somma sia positiva. La cosa non deve aver convinto completamente Fibonacci anche perché in un problema successivo accetta delle soluzioni espresse con dei numeri negativi pensati come debito. Difatti Fibonacci risolve nuovamente il problema esprimendo, questa volta, i denari dei due uomini come parti della somma mediana. In questo modo con calcoli analoghi trova che

$$x_1 = 4\frac{15}{17},$$

il che è incoerente essendo meno di 5 ciò che il secondo chiede al primo uomo⁽¹⁷⁾.

⁽¹⁵⁾ Sint iterum duo homines, et primus petat secundo 7 et habeat similiter quinquies tantum quam ipse et unum plus. Secundus quoque petat 5 primo et habeat septies tantum quam ipse et 15 plus (Cap. XII, 241, pg. 331).

⁽¹⁶⁾ Si ex utraque portione extrahantur denarii $\frac{1}{3} 14$, remanebit minor summa cum $\frac{2}{3}$ unius denarii equalis de $\frac{1}{8} \frac{1}{6}$ ipsius summe, quod est impossibile (Cap. XII, 243, pg. 332).

⁽¹⁷⁾ Quod est inconueniens, cum sint minus de 5 quos petit secundus ipsi primo homini (Cap. XII, 245, pg. 332).

Dunque in questo caso il problema, pur essendo surreale, ha una sua coerenza interna che suppone tacitamente $x_1 > 5$ e $x_2 > 7$.

Capire il confine tra il possibile e l'impossibile deve avere molto interessato Fibonacci, perché ritorna più avanti e in modo diverso sulla questione. Intanto questo stesso problema diventa via via più complicato: gli interlocutori diventano tre e ognuno di loro chiede agli altri 2 dei denari:

$$\begin{cases} x_1 + 7 = 5(x_2 + x_3 - 7) \\ x_2 + 9 = 6(x_3 + x_1 - 9) \\ x_3 + 11 = 7(x_1 + x_2 - 11) \end{cases} \begin{cases} x_1 + 7 = 5(x_2 + x_3 - 7) + 1 \\ x_2 + 9 = 6(x_3 + x_1 - 9) + 1 \\ x_3 + 11 = 7(x_1 + x_2 - 11) + 1 \end{cases} \begin{cases} x_1 + 7 = 5(x_2 + x_3 - 7) + 1 \\ x_2 + 9 = 6(x_3 + x_1 - 9) + 2 \\ x_3 + 11 = 7(x_1 + x_2 - 11) + 3 \end{cases}$$

Come nel caso dei due uomini questo tipo di sistema, qualunque siano i numeri interi che intervengono, è sempre compatibile perché, diremmo oggi, il determinante della matrice dei coefficienti è non nullo e dunque il sistema ha sempre una e una sola situazione (magari inaccettabile se contraria alla logica del problema). Fibonacci poi si rende conto con grande mestiere che, nel caso di 4 uomini, due dei quali chiedono agli altri due uomini dei denari, la situazione cambia radicalmente. Infatti comunque siano i valori a, b, c, d , il determinante della matrice dei coefficienti del sistema risulta nullo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a & a \\ b & 1 & 1 & b \\ c & c & 1 & 1 \\ 1 & d & d & 1 \end{vmatrix} = 0$$

perciò il sistema è genericamente incompatibile e solo per particolari valori dei termini noti è compatibile e, in quei casi, con infinite soluzioni.

Il sistema considerato da Fibonacci (Cap. XII, 288, pg. 339) è il seguente:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 7 = 3(x_3 + x_4 - 7) \\ x_2 + x_3 + 8 = 4(x_4 + x_1 - 8) \\ x_3 + x_4 + 9 = 5(x_1 + x_2 - 9) \\ x_4 + x_1 + 11 = 6(x_2 + x_3 - 11) \end{cases}$$

sistema che risulta di fatto incompatibile. Ma è questo un caso di impossibilità ben diverso dal precedente. Vediamo come argomenta Fibonacci. Guardando la terza e la prima equazione trova rispettivamente $x_1 + x_2 - 9 = \frac{1}{6}m$ e $x_3 + x_4 - 7 = \frac{1}{4}m$, dove m è la somma di tutti i denari. Sommando abbiamo:

$$m - 16 = \frac{5}{12}m \text{ da cui } m = 27 \frac{3}{7}.$$

Guardando ora la seconda e la quarta equazione, con lo stesso argomento, si trova $m - 19 = \frac{12}{35}m$ da cui $m = 82 \frac{21}{23}$. Commenta Fibonacci:

ciò è incoerente, poiché con la prima ricerca trovammo che la loro somma è un'altra, cioè $\frac{3}{7} 27$: quindi questo problema è insolubile⁽¹⁸⁾.

In questo caso il problema non ha soluzione perché è impossibile che un numero sia uguale ad un altro diverso. L'impossibilità è ora nelle equazioni, nella matematica e non, come prima, nell'interpretazione delle soluzioni: due numeri diversi sarebbero uguali.

Con grande abilità tecnica Fibonacci non si ferma qua ma, con opportuni aggiustamenti sui termini noti del sistema, esibisce un nuovo sistema con la stessa matrice dei coefficienti:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 100 = 3(x_3 + x_4 - 100) \\ x_2 + x_3 + 106 = 4(x_4 + x_1 - 106) \\ x_3 + x_4 + 145 = 5(x_1 + x_2 - 145) \\ x_4 + x_1 + 170 = 6(x_2 + x_3 - 170) \end{cases}$$

questa volta compatibile; che ha quindi, come si deve, infinite soluzioni che lui calcola esplicitamente con uno dei metodi esposti in precedenza. Crediamo che qui si delinei in nuce, attraverso esempi significativi ed esaustivi, l'intera teoria dei sistemi di equazioni lineari.

Nella tipologia di problemi della forma *uomini che hanno denari* Fibonacci presenta problemi con una, con nessuna o con infinite soluzioni, prefigurando una direzione che la ricerca matematica avrà in futuro: quella di saper decidere se un dato problema ha soluzioni in un determinato insieme numerico e, in caso affermativo, saperle calcolare. Questa direzione di ricerca, ancora estremamente viva ai giorni nostri, conduce direttamente ai problemi di teoria dei numeri dove le soluzioni sono da ricercarsi in determinati sistemi numerici, primi fra tutti in numeri interi. Non è diverso il problema dei *due uomini che hanno denari* da quello, che ci pare più astratto, che chiede di trovare due numeri per i quali il primo più 7 sia 5 volte il secondo meno 7 mentre il secondo più 5 sia 7 volte il primo meno 5.

⁽¹⁸⁾ quod est inconueniens, cum per primam investigationem inuenimus summam eorum esse aliter, scilicet $\frac{3}{7} 27$; unde hec questio insolubilis est (Cap. XII, 285, pg. 338).

D'altra parte il *Liber abaci*, indicando il futuro della matematica, si conclude con 90 problemi di Algebra, risolti con metodi algebrici, problemi interni alla nuova matematica che quest'opera veniva configurando, la stragrande maggioranza dei quali nulla ha a che fare con problemi di mercatura.

Questo monumentale lavoro si tronca infine su questo curioso enigma

$$30 \times 30X = 30 + 30X$$

Ecco le ultime parole del *Liber abaci*:

Et si dicemus tibi: trigesiplum cuiusdam census multiplicavi per 30 et quod provenit fuit equale additioni 30 dragmarum et trigesipli eiusdem census. Pone pro ipso censu rem, et multiplica 30 res per 30: venient 900 res, que equantur 30 rebus et 30 dragmis. Tolle ab utraque parte 30 res: remanebunt 870 res equales 30 dragmis. Divide ergo 30 per 870: veniet 1/29 dragme pro quantitate rei.

Il *Liber abaci* finisce qui, ma questo lavoro troverà seguito nella lunga tradizione dell'Algebra italiana a partire dai grandi algebristi del Cinquecento arrivando a Ruffini, Capelli e Bombieri.

Laura Catastini

laura.catastini@gmail.it

Franco Ghione

ghione@mat.uniroma2.it
